Université Paul Sabatier **Mai 2012**

L2 PCP, Préparation à l'oral : Suites et Séries.

Exercice 1. *Soit* $(r_n = p_n/q_n)_n$ *une suite de rationnels qui converge vers* $x \notin \mathbb{Q}$*. Montrer que* $\lim_n q_n = +\infty$.

Exercice 2. *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de nombres réels telle que les sous-suites* $(x_{2n})_n, (x_{2n+1})_n$ *et* $(x_{3n})_n$ *soient convergentes ; montrer que* $(x_n)_n$ *est convergente et que l'on ne peut se restreindre à la convergence de deux des trois sous-suites.*

Exercice 3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *montrer que le polynôme* $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ *admet une unique racine positive* $a_n \in \mathbb{R}_+$*. Montrer que* $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + o(1/2^{n+2})$.

Exercice 4. *Montrer qu'une suite* $(x_n)_n$ *de nombres réels vérifiant* $\lim_n x_n^2 = 1$ *et* $|x_{n+1} - x_n| < 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *converge.*

Exercice 5. *Soit* $e := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdots + \frac{1}{n!} + r_n$*. Montrer que* $\frac{1}{n+1} < n! r_n < \frac{1}{n}$*. En déduire que* $\lim_{n\to\infty} n \sin(2\pi e n!) = 2\pi$ *puis que* $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6. *Nature de la série de terme général* $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + a^2}),\ (a > 0)$.

Exercice 7. *Nature de la série de terme général* $u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n} + \left(1 + \frac{2}{n+a}\right)^n,\ (a > 0)$.

Exercice 8. *Convergence et somme de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+2^2+\cdots+n^2}$.

Exercice 9. *Existe-t-il une fonction* $f \in \mathscr{C}^2([-1,1], \mathbb{R})$ *telle que* $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ *converge mais* $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ *diverge ?*

Exercice 10. *Nature (convergence, convergence absolue) de la série* $\sum_{n\geq 2} u_n$ *de terme général* $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 11. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\log n)}{n}$ *diverge. (Indic : estimer la somme sur des blocs ou les cosinus est* $\geq \sqrt{2}/2$*...).*

Exercice 12. *Pour* $f \in \mathscr{C}([0,1])$ *on pose* $a_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$*. Montrer que la convergence de la série* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *implique* $f(1) = 0$*. Pour la réciproque considérer* $f(x) = -x/\log(x),\ x \in]0,1[$.

Exercice 13. *Utiliser le théorème des accroissements finis pour établir la divergence de la série de terme général* $1/k\log(k)\log(\log(k))$.
Estimer $\sum_{10^6\leq k\leq 10^7} 1/k\log(k)\log(\log(k)),\ \sum_{10^6\leq k\leq 10^7} 1/k\log(k), \sum_{10^6\leq k\leq 10^7} 1/k$*, observation ?*

3 juin 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr