Université Paul Sabatier **Juin 2012**

☯ L2 PCP, Préparation à l'oral : Séries de Fonctions : séries entières. ☯

Exercice 1. *Rayon de convergence et somme de la série entière* $\sum_{n\geq 0} 2^{n(-1)^n} x^n$.

Exercice 2. *Développer au voisinage du point* $a \in \mathbb{R}$ *la fonction* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 3. *On considère la suite réelle définie par* $a_0 = a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$. *Montrer que* $1 \leq a_n \leq n^2$ *pour tout* $n \geq 1$. *En déduire le rayon de convergence de la série* $f(x) = \sum_n a_n x^n$, *une équation différentielle vérifiée par* f *et enfin une expresion simple pour* f.

Exercice 4. *On considère la suite réelle définie par* $d_0 = 1, d_1 = 0,\ d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. *Montrer que* $n!/3 \leq d_n \leq n!$ *pour tout* $n \geq 2$. *En déduire le rayon de convergence de la série* $f(x) = \sum_n d_n x^n/n!$, *puis que* f *est solution de l'équation différentielle* $(1-x)y' - xy = 0$ *et enfin une expresion simple pour* f. *Exprimer* d_n *en fonction de* n.

Exercice 5. *On considère la série entière* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} s_{2n} x^{2n}$. *Déterminer son rayon de convergence. On note* $f(x)$ *sa somme. On pose* $g(x) = (1+x^2)f(x)$. *Déterminer une expression simple de* $g(x)$ *puis de* $f(x)$.

Exercice 6. *Déterminer un développement en série entière de* $f(x) = \ln(1+x+x^2)$.

Exercice 7. *Soit* $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(2n+1)}$.
- *Déterminer le domaine de définition de* f.
- *Déterminer une expression simple de* $f(x)$ *pour* x *dans* $]-1, 0]$.
- *Préciser* $f(-1)$.

Exercice 8. *Soient* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R *et* R'. *Montrer que le rayon de convergence la série entière* $\sum a_n b_n x^n$ *est supérieur ou égal à* RR'.

Exercice 9. *Soit* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{[\sqrt{n}]}$. *Déterminer le rayon de convergence de cette série entière et exprimer* f.

Exercice 10. *Soit la série entière* $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

(1) *Déterminer le rayon de convergence,* R, *de cette série entière.*

(2) *Quelle est la nature de la série en* R *et en* $-R$ *?*

(3) *On note* $S(x)$ *la somme de la série. Montrer que* S *est continue sur* $[-1, 1[$.

(4) *Montrer que* $\sum_{n\geq 2} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) x^n$ *converge normalement sur* $[-1, 1]$. *En déduire la limite de* $(1-x)S(x)$ *quand* $x \xrightarrow{\leq} 1$.

Exercice 11. *Déterminer une équation différentielle admettant pour solution la série entière* $f(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2} dt$. *En déduire que* f *est développable en série entière, préciser ce développement et sonn rayon de convergence.*

Exercice 12. *Soit* $f(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$. *Montrer que* f *est de classe* C^1 *sur son domaine de définition et préciser ce développement et son rayon de convergence.*

Exercice 13. *Soient* $a_0 = 1, a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(t-1)\dots(t-n+1) dt$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum_n a_n x^n$ *et expliciter la somme.*

Exercice 14. *Quel est le rayon de convergence de la série* $f(x) = \sum_n a_n x^n$ *où* $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$, $n \geq 0$ *? Expliciter* f.

---

11 juin 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr