Université Paul Sabatier **Juin 2012**

☯ L2 PCP, Préparation à l'oral : Séries de Fonctions - séries de Fourier. ☯

Exercice 1. *Existe-t-il une suite* (a_n) *telle que pour tout* x *de* $[0,\pi]$, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$?

Exercice 2. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)t}{1+\cos^2 t}\, dt$. *Calculer* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_n$.

Exercice 3. *Montrer que* $f(x) = \sin^3(x)$ *est développable en série de fourier et préciser ce développement.*

Exercice 4. *Soit* $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ *(continue et* 2π*-périodique...). Si tous les coefficients de Fourier de* f *sont nuls ; montrer que* f *est identiquement nulle.*

Exercice 5. *Déterminer toutes les applications* $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ *(de classe* C^1 *et* 2π*-périodique) vérifiant* $2f(x+1) = f(x) + f(2x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. *Déterminer toutes les applications* $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R})$ *(de classe* C^{∞} *et* 2π*-périodique) vérifiant* $f(2x) = 2\sin(x) f'(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. *Existe-t'il* $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ *dont la série de Fourier soit* $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$?

Exercice 8. *Démontrer que* $f(x) = \log(2 + cos(x)),\ (x \in \mathbb{R})$ *est développable en série de Fourier et préciser ce développement.*

Exercice 9. *Démontrer que* $f(x) = Arsin(\sin x)$ *est développable en série de Fourier et préciser ce développement.*

Exercice 10. *Utiliser les séries de Fourier pour évaluer l'intégrale*

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos(\cos(x)) ch(\sin(x)) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 11. *Démontrer que* $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)},\ (x \in \mathbb{R})$ *est développable en série de Fourier et préciser ce développement (deux méthodes sont possibles : développer la fraction en une série d'exponentielles* $e^{ikx}, (k \in \mathbb{Z})$ *ou bien trouver une relation de recurrence satisfaite par les coefficients de Fourier réels de* f*) .*

Exercice 12. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *La fonction* $f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$ *est-elle développable en série de Fourier ? Calculer ce développement (indic : éviter le calcul direct des coef.).*

Exercice 13. *Soit* $\alpha \in \mathbb{C}$, *pour* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $|\alpha| \neq 1$, *calculer* $\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{\alpha - e^{i\theta}} d\theta$.

Exercice 14. *A l'aide de la fonction* $f(t) = \exp(e^{it})$ *montrer que* $\int_0^{2\pi} e^{2\cos(\theta)} d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2}$.

13 juin 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr