Université Paul Sabatier **Mai 2012**

☯ L2 PCP, Préparation à l'oral : Algébre Linéaire Réduction. ☯

Exercice 1. *Montrer que $M_n(\mathbb{R})$ admet une base constituée de matrices diagonales (en fabriquer une à partir de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ et de la matrice* $\mathrm{diag}(1,2,\dots,\mathrm{n})$*).*

Exercice 2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 - I_n = 0$ montrer que* $\mathrm{trace(A)} \in \mathbb{Q}$ *si et seulement si $n \equiv 0(3)$.*

Exercice 3. *On cherche les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(\bigstar)\ :\ A^2 = \mathrm{trace}(A)\cdot A + I_n$.*

(1) *Montrer qu'une matrice vérifiant $(\bigstar)$ est diagonalisable.*

(2) *Déterminer les matrices vérifiant $(\bigstar)$ qui sont de trace nulle.*

(3) *Montrer que pour $n = 2$ il existe des matrices vérifiant $(\bigstar)$ et de trace non nulle.*

(4) *Qu'en est-il si $n = 3$? $n \geq 4$?*

Exercice 4. *h, Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A \neq O$ et $A^3 + A = O$.*

(1) *A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$? et A^2 ?*

(2) *Montrer que A est semblable à* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. *Quelques exercices autour des polynômes annulateurs.*

(1) *Soit $A \in M_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 - 2A$. Montrer que A n'est pas inversible mais diagonalisable et déterminer toutes les matrices diagonales auxquelles A peut être semblable.*

(2) *Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle vérifiant $A^3 - 4A^2 + 4A = O$.*

(3) *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + 2A + A + I_n = O$. Montrer que n est pair et que trace$(A) \in \mathbb{Z}^-$.*

Exercice 6. *Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et trace$(A) = 8$. Quel est le polynôme caractéristique de A ? montrer que A est diagonalisable.*

Exercice 7. *Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation $A^5 = A^3$ et trace$(A) = n$.*

Exercice 8. *Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $A^N = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.*

Exercice 9. *Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^4$ et spec$(A) \supset \{\pm 1\}$. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.*

23 mai 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr