Université Paul Sabatier **Mai 2012**

☯ L2 PCP, Préparation à l'oral : Algébre Linéaire Généralités. ☯

Exercice 1. *Soient* A, B, C *trois sous espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *espace vectoriel* E. *Montrer que* $A \cap B = A + B$ *si et seulement si* $A = B$

Exercice 2. *Soient* H_1, H_2 *deux hyperplans dinstincts d'un* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *espace vectoriel* E *de dimension finie* d. *Quelle est la dimension de* $H_1 \cap H_2$ *Même question avec* $3, \ldots, d$ *hyperplans deux à deux distincts.*

Exercice 3. *Soit* $\mathscr{C} = \{AB - BA,\ A, B \in M_n(\mathbb{C}\}$. *Montrer que* $\mathscr{E} := \mathrm{vect}(\mathscr{C})$ *est de dimension* $n^2 - 1$.

Exercice 4. *Déterminer le reste de la division euclidienne de* $p(x) = x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ *par le polynôme* $x^3 - x$ *(se ramener à la résolution d'un système linéaire simple).*

Exercice 5. *Soient* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *telles que* $AB = BA$ *et* $B^n = 0$. *Montrer que* $\det(A + B) = \det(A)$ *(distinguer successivement les cas* $A = I_n$, A *est inversible puis quelconque).*

Exercice 6. *Déterminer la boule (euclidienne) de* $\mathbb{R}^3$ *passant par les quatres points* $A_1 = (1,0,0), A_2 = (1,1,0), A_3 = (1,1,1), A_4 = (0,1,1)$. *(Indic : écrire les équations que devraient vérifier ces points et se ramener à la résolution d'un système linéaire).*

Exercice 7. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice de rang 1,*

(1) *Déterminer le polynôme caractéristique de* A.
(2) *Montrer que* $\det(A + I_n) = \mathit{trace}(A) + 1$.
(3) *Si* $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, *montrer que* $\det(A + X\,{}^tX) = \det(A) \cdot (1 + {}^tXA^{-1}X)$.

Exercice 8. *Soient* E_1, E_2 *deux sous-espaces de* $\mathbb{R}^{10}$ *vérifiant* $E_1 \subset E_2, \quad \dim_{\mathbb{R}} E_1 = 3, \quad \dim_{\mathbb{R}} E_2 = 6$. *Déterminer la dimension du sous espace* $\mathscr{E}$ *de* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{10})$ *définit par*

$$\mathscr{E} = \left\{ T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{10})\ :\ T(E_1) \subset E_1 \ \&\ T(E_2) \subset E_2 \right\}.$$

(Indic : observer l'allure des matrices des éléments de $\mathscr{E}$ *écrites dans une base convenablement choisie de* $\mathbb{R}^{10}$*).*

Exercice 9. *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. *On désignera par* $\widehat{A}$ *la matrice obtenue à partir de* A *en remplacant pour tout* $1 \leq i \leq n$ *la* i*-ième colonne de* A *par la sommes des autres colonnes. On désigne par* $\widetilde{A}$ *la matrice déduite de* A *en retranchant pour tout* $1 \leq i \leq n$ *à la* i*-ième colonne de* A *la sommes des colonnes d'indices distincts de* i. *Exprimer en fonction de* $\det(A)$ *les déterminants* $\det(\widehat{A})$ *et* $\det(\widetilde{A})$

Exercice 10. *Calculer les déterminants :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 + a_n \end{vmatrix}, \quad \det(A_n) = \det((a_{ij} = |i - j|))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

23 mai 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr