**Université Paul Sabatier** **Mai 2012**

## ☯ L2 PCP, Préparation à l'oral : Algébre Bilinéaire, Espaces euclidiens. ☯

**Exercice 1.** *Déterminer le paramètre réel $\lambda$ pour que les deux droites d'équations*

$$(\mathscr{D}_1)\ \begin{cases} x+y+z &= 1, \\ x-2y+2z &= \lambda \end{cases}, \quad (\mathscr{D}_2)\ \begin{cases} z-2x &= 2, \\ y-x &= 1. \end{cases}$$

*soient coplanaires et donner alors une équation du plan qui les contient et calculer la distance du point $(1,1,1)$ à ce plan.*

**Exercice 2.** *Dans l'espace affine de dimension 3 muni d'un repère orthonormé on considère les deux droites*

$$(\mathscr{D})\ \begin{cases} x &= 4z-1, \\ y &= 2z+3 \end{cases}, \quad (\mathscr{D}')\ \begin{cases} x &= -z+2, \\ y &= 2z-1. \end{cases}$$

*Déterminer un système d'équation cartésiennes définissant la perpendiculaire commune $\Delta$ aux deux droites. En déduire la distance entre ces deux droites.*

**Exercice 3.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Si ${}^tAA = A{}^tA$, montrer que $A$ est la matrice nulle.*

**Exercice 4.** *Si $A$ est une matrice symétrique réelle non nulle, montrer que*

$$\frac{trace^2(A)}{trace(A^2)} \leq rang(A).$$

**Exercice 5.** *Pour $a_0, a_1, \dots / a_n \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$.*

(1) *A quelle condition $(\mathbb{R}_n[x], \langle\cdot/\cdot\rangle)$ est-il un espace euclidien ?*

(2) *Préciser une base orthonormée de $(\mathbb{R}_n[x], \langle\cdot/\cdot\rangle)$.*

(3) *Calculer la distance de $X^n$ à $\mathscr{F} := \{\, P \in \mathbb{R}_n[x]\ :\ \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$.*

**Exercice 6.** *Soit $A = ((a_{ij})) \in M_n(\mathbb{R})$. On se propose de démontrer que $|\det(A)| \leq n^{n/2}\delta^n$ où $\delta := \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$. Traiter le cas où $A \notin GL_n(\mathbb{R})$. On suppose maintenant que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et note $C_i$ la i-ième colonne de $A$ : $A = (C_1, \dots, C_n)$.*

(1) *Construire (avec Schmidt) une base orthogonale $(V_1, \dots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $|\det(A)| = |\det(C_1, \dots, C_n)| = |\det(V_1, \dots, V_n)| = \|V_1\| \dots \|V_n\|$.*

(2) *Avec Pythagore, montrer que $\|C_i\|^2 \geq \|V_i\|^2$.*

(3) *Conclure.*

**Exercice 7.** *Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 3$, $a, b \in E$ deux vecteurs non colinéaires et unitaires. On définit $f\ :\ E \ni x \mapsto f(x) = \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.*

(1) *Montrer que $f$ est un endomorphisme symétrique de $E$.*

(2) *Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de $f$.*

**Exercice 8.** *Pour $B, C \in M_n(\mathbb{R})$ on pose $\langle A, B\rangle := trace(B\,{}^tC)$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $trace(AX) = 0$ pour toute matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.*

(1) *Montrer que $(M_n(\mathbb{R}), \langle,\rangle)$ un espace euclidien.*

(2) *Soit $\mathscr{E} := \{M \in M_n(\mathbb{R})\ \ trace(M) = 0\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, préciser sa dimension, une base et son orthogonal.*

(3) *Montrer que $A = \lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}$.*

18 mai 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr