I.N.P. **27 Février 2012**

☯ ☢ ☯ **EXAMEN FINAL Bis, Suites et Séries de Fonctions.** ☯ ☢ ☯

ℹ `Durée 2h, documents, calculatrices, téléphones interdits.`
`Les logarithmes sont tous népériens.`

Exercice 1. *(5 points) Soient $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ est **simplement** convergente sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.*

(1) *Si les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$ montrer que f est aussi croissante sur $\mathbb{R}$.*

(2) *On suppose les f_n strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, montrer à l'aide d'un exemple judicieusement choisi que f n'est pas forcément strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

(3) *On suppose les f_n bornées sur $\mathbb{R}$, et la suite $(f_n)_n$ **uniformément** convergente sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.*

(a) *Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq 1$.*

(b) *Montrer que f est aussi bornée sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 2. *(10 points) Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.*

(1) *Étudier la simple convergence sur $\mathbb{R}$ de cette **suite** de fonctions.*

(2) *Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.*

(3) *Étudier la simple convergence sur $\mathbb{R}$ de la **série** de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.*

(4) *Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ n'est pas normale sur $\mathbb{R}$.*

(5) *Étudier l'uniforme convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.*

(6) *En déduire que $\sum_{n\geq 0} f_n = f$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$.*

(7) *Montrer que pour tout $x > 0$ on a $G(x) := \sum_{n\geq 0} e^{-nx^2} = \frac{1}{1-e^{-x^2}}$.*

(8) *Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $G'(x) = -2f(x)$ pour tout $x > 0$.*

(9) *Montrer que f n'est pas continue à l'origine.*

Exercice 3. *(6 points) Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n nx^2}$.*

(1) *Etudier la simple convergence sur $[0,1]$ de cette suite de fonctions.*

(2) *Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$.*

(3) *Calculer la $\lim_{n\to+\infty} I_n$.*

(4) *En déduire que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.*

(5) *Donner une démonstration directe du fait que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.*

☯ ☢ **Fin de l'épreuve** ☢ ☯

18 février 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE. Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr

Corrigé Succinct.

Solution de l'exercice 1 : Voir le corrigé du premier examen. ■

Solution de l'exercice 2 :

(1) La simple convergence sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers la fonction nulle ne pose aucun problème.

(2) L'étude des variations de f_n sur $\mathbb{R}$ donne $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = f_n(1/\sqrt{2n})$ qui ne tends pas vers zéro avec n. La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

(3) $\lim_n n^2 f_n(x) = 0$ pour tout réel x : on a bien la simple convergence sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.

(4) La convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne peut être normale sur $\mathbb{R}$ puisque l'on a vu plus haut que $\lim_n \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| \neq 0$ (condition suffisante de non UCV : cours).

(5) L'étude faite en (2) nous suggère d'éviter l'origine et nous assure aussi que pour tout $a > 0$: $\sup_{|x|\geq a}|f_n(x)| = |f_n(x)| = nae^{-na^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Il y a bien normale convergence sur $\{|x| \geq a\}$.

(6) Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ donc avec la question précédente f est continue sur $\{|x| \geq a\}$ pour tout $a > 0$ donc sur $\mathbb{R}^\star$.

(7) C'est une banale série géométrique convergente car de raison $0 < e^{-x^2} < 1$ $(x > 0)$.

(8) $G(x) = \frac{1}{1-e^{-x^2}}$ est clairement indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. En outre on peut dériver sous le signe somme car (question (5)) $g_n'(x) = -2f_n(x)$ ce qui assure la normale CV de $\sum_n g_n'$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. On peut appliquer le théorème de Weierstrass qui nous assure que $G'(x) = \sum_n g_n'(x) = -2\sum_n f_n(x) = -2f(x)$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ donc sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(9) Ainsi pour tout $x > 0$: $f(x) = -G'(x)/2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-x^2}}\right)' = \frac{xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} \underset{0_+}{\sim} \frac{1}{x^3}$, donc $\lim_{0_+} f(x) = +\infty \neq 0 = f(0)$. f n'est pas continue à l'origine. ■

Solution de l'exercice 3 :

(1) Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ et pour $x \neq 0$ on a $f_n(x) \underset{\infty}{\sim} 2^n x/2^n nx^2 = 1/nx \to 0$. La suite est donc simplement convergente vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

(2) Un calcul élémentaire donne $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{2n}\log(1 + n2^n)$.

(3) Vu ce qui précède : $I_n \underset{\infty}{\sim} \frac{\log(n2^n)}{2n} = \frac{n\log(2)+\log(n)}{2n} \to \frac{\log(2)}{2}$.

(4) Si la suite $(f_n)_n$ convergeait uniformément sur $[0, 1]$ on aurait d'après le cours (inversion limite/intégrale sur un **segment**) : $\frac{\log(2)}{2} = \lim_n I_n = \int_0^1 \lim_n f_n(t)dt = 0$. C'est absurde et la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

(5) La suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle si, et seulement si $\lim_n \sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)| \neq 0$; or $f_n(2^{-n}) = (1 + 2^{-n})^{-1} \to 1$ d'où le résultat (moins sportivement, et si l'on veut perdre du temps, on peut aussi étudier les variations de f_n sur $[0, 1]$).

18 février 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr