EXAMEN FINAL, Suites et Séries de Fonctions.

Durée 2h, documents, calculatrices, téléphones interdits.
Les logarithmes sont tous népériens.

Exercice 1. *(6 points) Soient $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Répondre aux questions suivantes ou bien fournir un contre-exemple, une représentation graphique du graphe de f_n peut parfaitement suffire.*

(1) *On suppose que la suite $(f_n)_n$ est **simplement** convergente sur $\mathbb{R}$ vers f.*
   - (a) *Si les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi croissante sur $\mathbb{R}$?*
   - (b) *Si les f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$?*
   - (c) *Si les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi continue sur $\mathbb{R}$?*
   - (d) *Si les f_n sont bornées sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi bornée sur $\mathbb{R}$?*

(2) *On suppose que la suite $(f_n)_n$ est **uniformément** convergente sur $\mathbb{R}$ vers f.*
   - (a) *Si les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi croissante sur $\mathbb{R}$?*
   - (b) *Si les f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$?*
   - (c) *Si les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi continue sur $\mathbb{R}$?*
   - (d) *Si les f_n sont bornées sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi bornée sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 2. *(11 points) On rappelle que $\zeta(2) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(3) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3} \simeq 1.2$.*

(1) *A l'aide des sommes partielles $1 + x + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$ montrer que $\sum_{k=0}^\infty x^k = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$.*

(2) *Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$: $\log(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k}$.*

(3) *Préciser (soigneusement) le domaine de définition de $F(x) = \int_0^1 t^x \log(t)\log(1-t)dt$.*

(4) *Montrer que F est continue sur $]-2,+\infty[$.*

(5) *Montrer que pour tout $x > -2$ on a $F(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+x+1)^2}$.*

(6) *Montrer que $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+2)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$.*

(7) *Montrer que $F(1) = \int_0^1 t\log(t)\log(1-t)dt = 1 - \frac{\zeta(2)}{2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}$.*

(8) *Calculer $F(-1)$ et montrer que $F(0) = \int_0^1 \log(t)\log(1-t)dt = 2 - \zeta(2) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.*

Exercice 3. *(4 points) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{ch(x)}$ est convergente, enfin montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{ch(x)} = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.*

Fin de l'épreuve

9 février 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE. Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr

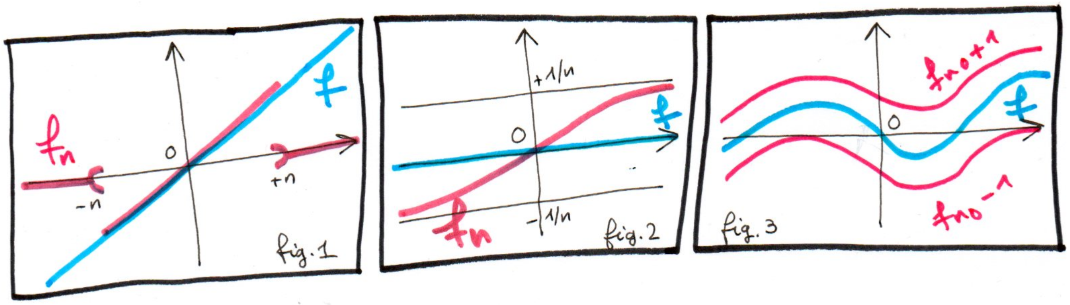
Corrigé.

Exercice 4. (1) (a) *Bien entendu $x \leq y$ implique $f_n(x) \leq f_n(y)$ pour tout n donc, (après avoir fait tendre n vers l'infini) : $f(x) \leq f(y)$.*

(b) *Certainement pas : considérer les fonctions strictement croissantes $f_n(x) = x/n$ qui convergent vers la fonction nulle.*

(c) *Surement pas : on a vu plein d'exemples en TD.*

(d) *Surement pas : considérer la suite de fonctions bornées $f_n(x) = x\mathbf{1}_{[-n,n]}(x)$ (voir la figure 1) qui converge simplement vers $f(x) = x$.*



(2) (a) *Oui, vu (1-a).*

(b) *Non, considérer une suite de fonctions strictement croissantes simplement convergente (par exemple $f_n(x) = \arctan(x)/n$) vers la fonction nulle (voir la figure 2).*

(c) *Bien entendu : c'est le cours !*

(d) *C'est vrai, mais pas si simple : écrivons la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ avec $\varepsilon = 1$: il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq 1$. On en déduit sans peine que pour tout réel x : $|f(x)| \leq \|f_{n_0}\| + 1$: f est bien bornée sur $\mathbb{R}$ (voir la figure 3).*

Exercice 5. (1) *Pour tout $x \in]-1,1[$, $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc : $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$.*

(2) *avec la question précédente, nous avons pour tout $x \in]-1,1[$:*

$$\log(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} t^k dt \underset{(\star)}{=} -\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k dt = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

où l'échange $\int \sum = \sum \int$ est justifié par soit la normale convergence sur le segment $[0,x]$ de la série $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$ (puisque $\sup_{t\in[0,x]} |t^k| = x^k$) soit parce que la série de terme général $\int_0^x |t^k| dt = |x|^k/k$ est est convergente.

(3) *Posons $\varphi(x,t) = t^x \log(t)\log(1-t)$, l'intégrale est impropre en 0 et 1. Au voisinage de 0 : $\varphi(x,t) = t^x \log(t)\log(1-t) \sim_0 -t^{x+1}\log(t) > 0$, l'intégrale est donc convergente en $t = 0$ si et seulement si $x > -2$ (car $\frac{\log(v)}{v^\alpha}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha > -1$). Au voisinage de 1 on aura $\varphi(x,t) = t^x \log(1+t-1)\log(1-t) \sim_1 (t-1)\log(1-t) > 0$ qui est classiquement intégrable en 1 (puisque $v\log(v)$ l'est en 0). Le domaine de définition de F est donc $\mathscr{D}_F =]-2,+\infty[$.*

(4) *Soit $-2 < a < 0$ et $x \in [a,0]$ alors, $\log(t) < 0$ pour tout $t \in]0,1[$ implique $0 \leq t^x = e^{x\log(t)} \leq e^{-a\log(t)} = t^a$ pour tous $t \in]0,1[$ et $x \in [a,0]$. Enfin, $x \geq 0$, implique $0 \leq t^x \leq 1$ pour tout $t \in]0,1[$. En résumé $|\varphi(x,t)| \leq t^a \log(t)\log(1-t) + \log(t)\log(1-t) := g(t) \in L^1([0,1])$ pour tout $t \in]0,1[$ et $x \in [a,+\infty]$, ceci pour tout $-2 < a < 0$. Par convergence dominée F est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $-2 < a < 0$ donc F est continue sur $]-2,+\infty[$.*

(5) *Nous avons avec la question (2) pour $x > -2$*

$$F(x) = \int_0^1 t^x \log(t)\log(1-t)dt = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} t^{x+k}\log(t)dt \underset{(\star)}{=} -\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 t^{x+k}\log(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+x+1)^2}$$

après une facile intégration par parties pour la dernière égalité. Il reste bien entendu à justifier l'échange $(\bigstar)$: $\int \sum = \sum \int$ qui est assuré par la convergence de la série de terme général $\int_0^1 |t^{x+k}\log(t)|dt = \frac{1}{k(k+x+1)^2} \sim \frac{1}{k^3}$.

(6) *Nous avons $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+2)} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} \lim_{N\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{N+2}\right) = \frac{1}{2} \lim_{N\to+\infty} (1 + 1/2 - 1/(N+1)) = \frac{3}{4}$.*

(7) *Avec les questions (5) et (6) :* $F(1) = \int_0^1 t\log(t)\log(1-t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+2)} - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\left(\zeta(2) - 1 - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{\zeta(2)}{2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}$.

(8) $F(-1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} = \zeta(3)$ *ne pose aucun problème, et pour* $F(0)$ *on procède exactement comme pour la question précédente :* $F(0) = \int_0^1 \log(t)\log(1-t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \zeta(2) + 1 = 2 - \zeta(2) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 6. *La convergence ne doit pas poser de problème et pour la suite on écrit* $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{ch(x)} = 2\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}dx}{1+e^{-2x}} = 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2nx}dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty} x(-1)^n e^{-(2n+1)x}dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ *où encore une fois l'échange* $\int\sum = \sum\int$ *qui est assuré par la convergence de la série de terme général* $\int_0^{+\infty}|x(-1)^n e^{-(2n+1)x}|dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$.

9 février 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr