☯ ☢ ☯ Suites et Séries de Fonctions – Feuille 2. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. (1) *Montrer que* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2n^4}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$, *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^\star$ *et étudier sa dérivabilité à l'origine (encadrer le taux d'accroissement de* f *en comparant avec des intégrales...).*

(2) *Etudier* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ *sur son domaine de définition, continuité, dérivabilité (en particulier montrer que* f *est dérivable à droite en* 0_+*...).*

(3) *Etudier* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ *sur son domaine de définition, continuité, dérivabilité (en particulier à l'origine...).*

(4) *Montrer que* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Arctan(nx)}{n^2}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$, *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^\star$ *et étudier sa dérivabilité à l'origine.*

Exercice 2. *Etudier la convergence uniforme des séries suivantes sur l'ensemble* A *:*

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right), \quad A =]0, +\infty[.$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), \quad A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1/2 \leq |x| \leq 2\}.$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - Arctan(n^2(1+x^2))\right), \quad A = \mathbb{R}.$

Exercice 3. (1) *Montrer que pour tout* $x \in [0, \pi/2]$ *:* $\sin(x) \geq 2x/\pi$.

(2) *Montrer que la fonction* f *définie par* $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

(3) *Montrer que* f *n'est pas dérivable à l'origine.*

Exercice 4. (1) *Etude de la série de fonctions* $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{|x|}{x^2+n^2}$ *(en particulier, montrer que* f *est dérivable à gauche et à droite en l'origine).*

(2) *Etude de la série de fonctions* $f(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{\arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

Exercice 5. *Montrer que* $f(x) = \sum_{n\geq 1} x^{n^2} \in \mathscr{C}^\infty(]-1,1[)$ *et est équivalente à* $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\log(x)}}$ *en* 1_- *(comparer avec des intégrales, on rappelle/admet que* $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2$*).*

Exercice 6. *Montrer que* $f(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{E(nx)}{n^3}$ *(*E *est la partie entière) est définie sur* $\mathbb{R}$*, continue sur* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$*, discontinue sur* $\mathbb{Q}$ *(mais tout de même continue à droite).*

Devoir 2, à rendre en TD le vendredi 20 janvier.

Exercice 7. *Pour* $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}^\star$ *on pose* $f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.

(1) *Montrer que la série* $\sum_1^\infty f_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$*, on note* F_α *sa limite.*

(2) *Montrer que pour tout* $\alpha > 1/2$*, la série converge normalement sur* $\mathbb{R}$*.*

(3) *Montrer que pour tout* $0 < \alpha < 1/2$*, la série converge normalement sur* $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$, $\forall\, a > 0$.

(4) *Pour* $0 < \alpha < 1/2$ *et* $N \in \mathbb{N}^\star$*, montrer que* $F_\alpha(1/\sqrt{N}) \geq \sum_{n\geq 4N} f_n(1/\sqrt{N}) \geq \frac{\sqrt{N}}{2}\int_{4N}^\infty \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$*, conclusion ?*

(5) *Préciser le domaine de continuité de* F_α *suivant les valeurs de* α*.*

(6) *Montrer que pour* $\alpha > 1$*, la série* $\sum_1^\infty f_n'$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}$*.*

(7) *Pour* $0 < \alpha \leq 1$ *montrer que la série* $\sum_1^\infty f_n'$ *converge normalement sur* $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$, $\forall\, a > 0$.

(8) *Que peut-on en déduire sur la dérivabilité de* F_α *? (pour* $1/2 < \alpha \leq 1$ *on pourra étudier le taux d'accroissement de* F_α *en* 0*.*

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr