☯ ☢ ☯ Suites et Séries de Fonctions – Feuille 1. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Etudier les suites de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, g_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2},\ h_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2},\ k_n(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\ n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2.

(1) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{2n} x^k\right)^{-1},\ n \in \mathbb{N}$.

(2) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = 4^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right),\ n \in \mathbb{N}$.

(3) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $[1,+\infty[$ *par* $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

(4) *Etudier la suite de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = \sqrt[2n]{1+x^{2n}}$.

(5) *On pose pour* $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = \sqrt{n+1}\sin^n(x)\cos(x)$. *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$, *la convergence est-elle uniforme sur* $\mathbb{R}$?

(6) *Etudier la convergence simple et uniforme sur* $\mathbb{R}_+$ *de la suite de fonctions* $f_n\ :\ x \mapsto x^n e^{-x}/n!$ *et déterminer* $\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt$. *Commentaire ?*

Exercice 3. *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *à dérivée uniformément continue sur* $\mathbb{R}$. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$: $f_n(x) = nf(x+n^{-1}) - f(x))$. *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers* f'. *Par un exemple, montrer que l'hypothèse de continuité uniforme sur* f' *est essentielle.*

Exercice 4. *Que dire d'une fonction* $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ *vérifiant* $\int_a^b t^n f(t)dt = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$?

Exercice 5. *Pour* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *on pose* $f_n(x) = Arctan(x/n)$.

1) Montrer que la suite $(f_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$. *La convergence est-elle uniforme ?*

2) Montrer que la suite $(f_n')_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 6. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ *vériifiant* $f(0) = 0 = \lim_{+\infty} f(x)$. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star, x \in \mathbb{R}_+$: $g_n(x) = f(nx)f(x/n)$. *Montrer que la suite* $(g_n)_n$ *est uniformément convergente sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *vérifiant pour tout* $x \in \mathbb{R}^\star$: $|f(x)| < |x|$. *Montrer que la suite des itérés* $(f^n := f \circ f \cdots \circ f)_n$ *est uniformément convergente vers la fonction nulle sur* $[-a,a]$ *pour tout* $a > 0$.

Exercice 8. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions uniformément continues sur* $\mathbb{R}$ *qui converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers* f, *montrer que* f *est uniformément continue.*

Exercice 9. *Soit* $(P_n)_n$ *une suite de polynômes uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$ *vers* f, *montrer que* f *est un polynôme.*

Exercice 10. *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle,* $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{X\}$ *vérifiant* $P(I) \subset I$ *et* $(P_n)_n$ *la suite d'applications définie par* $P_1 = P$ *et* $P_{n+1} = P_n \circ P$ *pour tout* $n \geq 2$. *On suppose que la suite* $(P_n)_n$ *converge uniformément sur* I *vers* f. *Montrer que* f *est constante.*

Exercice 11. *Soit* $f\ :\ ]0,1] \ni t \mapsto f(t) = \sin(1/t)$. *Montrer que* f *n'est pas limite uniforme sur* $]0,1]$ *d'une suite de polynômes.*

Exercice 12. *Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *où* f_n *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x) = \cos^n(x/\sqrt{n})$ *(commencer par montrer que pour tout réel* u *:* $1-u^2/2 \leq \cos(u) \leq 1-u^2/2+u^4/24$ *puis, que pour tout* $u \in [0,1/2]$ *:* $-u-u^2 \leq \log(1-u) \leq -u$*).*

Exercice 13. *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *où* f_n *est définie sur* $]-\pi,\pi[$ *par* $f_n(x) = \sum_{p=1}^n 2^{-p}\tan(2^{-p}x)$ *est simplement convergente sur* $]-\pi,\pi[$ *vers une limite que l'on précisera (on pourra utiliser après l'avoir démontrée, la formule* $\tan(y/2) = cotan(y/2) - 2cotan(y)$*).*

Devoir 1, à rendre en TD le vendredi 13 janvier.

Exercice 14. *Soient* $0 < a < b < 1$ *et* $f \in \mathscr{C}([a,b])$*. On prolonge* f *sur* $\mathbb{R}\setminus[a,b]$ *en posant* $f(x) = 0$ *pour* $x \leq 0$, $f(x) = xf(a)/a$ *pour* $0 < x < a$, $f(x) = \frac{1-x}{1-b}f(b)$ *pour* $b < x < 1$ *et* $f(x) = 0$ *si* $x \geq 1$*. Enfin, pour tout entier* n *on pose :*

$$J_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt, \quad P_n(x) = J_n^{-1}\int_0^1 f(t)(1-(t-x)^2)^n dt.$$

(1) *Soit* $f \in \mathscr{C}([a,b])$*, montrer que son prolongement à* $\mathbb{R}$ *est continu et donner une représentation graphique.*

(2) *Montrer que* P_n *est un polynôme en* x *de degré* $\leq 2n$*.*

(3) *Montrer que pour* $x \in [0,1]$ *:*

$$P_n(x) = J_n^{-1}\int_{-1+x}^{1+x} f(t)(1-(t-x)^2)^n dt = J_n^{-1}\int_{-1}^1 f(u+x)(1-u^2)^n du.$$

(4) *En déduire que pour tout* $x \in [0,1]$ *:* $P_n(x) - f(x) = J_n^{-1}\int_{-1}^1 [f(u+x)-f(x)](1-u^2)^n du$*.*

(5) *Soit* $\varepsilon > 0$*, montrer qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $|f(x+u)-f(x)| \leq \varepsilon/2$ *pour tout* $x \in [0,1]$ *et* $|u| < \delta$*.*

(6) *Montrer que* $|f(x+u)-f(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty u^2}{\delta^2}$ *pour tout* $x \in [0,1]$ *et tout* $|u| \geq \delta$*.*

(7) *Montrer que* $|f(x+u)-f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2\|f\|_\infty u^2}{\delta^2}$ *pour tout* $u \in [-1,1]$ *et* $x \in [0,1]$*.*

(8) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in [0,1]$ *:*

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2 J_n}\int_{-1}^1 u^2(1-u^2)^n du \leq \varepsilon/2 + \frac{\|f\|_\infty}{(n+1)\delta^2}.$$

(9) *En déduire que la suite* $(P_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $a,b]$*.*

(10) *Démontrer le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment* $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ *est limite uniforme sur* $[\alpha,\beta]$ *d'une suite de polynômes.*

2 janvier 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr