I.N.P. **Janvier 2012**

☯ ☢ ☯ Suites et Séries de Fonctions – Devoir 3 petit corrigé. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *(calcul de l'intégrale de Dirichlet $I = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(u)}{u} du = \pi/2$). On pose pour $t \in \mathbb{R}_+$:*

$$C(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx.$$

(1) *Montrer l'absolue convergence de l'intégrale pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.*

(2) *Montrer que $C \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$.*

(3) *Montrer que $C \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.*

(4) *Montrer que $C \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^\star)$ et $C''(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$, $t > 0$.*

(5) *Montrer que $\lim_{+\infty} C(t) = \lim_{+\infty} C'(t) = 0$.*

(6) *En déduire C' puis C sur $\mathbb{R}_+^\star$.*

(7) *En déduire la valeur de l'intégrale de Cauchy $I = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(u)}{u} du$.*

Corrigé

(1) Posons pour $x, t \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, : $\varphi(x,t) = e^{-tx}\frac{1-\cos(x)}{x^2} \geq 0$. L'intégrale est visiblement impropre en 0 et $+\infty$. Au voisinage de 0 un développement limité donne $\varphi(x,t) \underset{x\to 0_+}{\sim} 1/2$; pour $x \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}_+$ on a $|\varphi(x,t)| \leq 2/x^2$. Donc équivalent et comparaison assurent la convergence pour tout $t \geq 0$ (en fait l'exponentielle ne joue aucun rôle pour la convergence de C).

(2) • Soit $a > 0$ et $t \in [a, +\infty[$. La formule de Taylor-Lagrange (on peut plus simplement écrire $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = 2\sin^2(x/2)/x^2 \ldots$) à l'ordre 2 nous dit que $\cos(x) - 1 = x^2 |\cos(\zeta_x)|/2$ pour tout $x \geq 0$ avec $0 \leq \zeta_x \leq x$. On en déduit que : $|\varphi(x,t)| \leq e^{ax}|\frac{1-\cos(x)}{x^2}| \leq e^{-ax}/2 \in L^1(\mathbb{R}_+)$, et ceci pour tout $t \geq a > 0$ et $x \geq 0$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres assure alors la continuité de C sur $[a, +\infty$ pour tout $a > 0$. Donc $C \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+^\star)$.
• Il reste (on aurait pu aussi dominer directement pour $t \in \mathbb{R}_+ \ldots$) à établir la continuité en 0, pour $t > 0$: $|C(t) - C(0)| = \int_0^\infty \left|(e^{-tx} - 1)\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right| dx$; or pour tout $x > 0$ et tout $t \geq 0$:

$$|\psi(x,t)| = \left|(e^{-tx} - 1)\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right| \leq g(x) := \begin{cases} 2, & \text{si } \; x \in [0,1] \\ 4/x^2, & \text{si } \; x \geq 1 \end{cases}$$

Comme $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ par convergence dominée on peut alors écrire : $\lim_{t\to 0_+} C(t) - C(0) = \int_0^\infty \lim_{t\to 0_+} \psi(x,t) dx = 0$, et C est bien continue à l'origine.

(3) En vue d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, le théorème des accroissements finis donne : $\partial_t \varphi(x,t) = e^{-xt}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = e^{-xt}\cos(\zeta_x)$ où $0 < \zeta_x < x$. Donc $|\partial_t \varphi(x,t)| \leq e^{-xt} \leq e^{-ax} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ pour tout $x > 0$ et tout $t \geq a > 0$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres assure alors que $C \in \mathscr{C}^1([a, +\infty[)$ pour tout $a > 0$ soit $C \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$ avec pour tout $t > 0$: $C'(t) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\cos(x)-1}{x} dx$.

(4) Pour la dérivée d'ordre 2 c'est la même procédure : $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t) = e^{-xt}(\cos(x)-1)$ donc $\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t)\right| = e^{-xt}|\cos(x)-1| \leq 2e^{-xt} \leq 2e^{-ax} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ pour tout $x \geq 0$ et tout $t \geq a > 0$. Comme plus haut, il en résulte que $C \in \mathscr{C}^2([a,+\infty[)$ pour tout $a > 0$ soit $C \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^\star)$ avec pour tout $t > 0$: $C''(t) = \int_0^\infty e^{-xt}(1-\cos(x))dx$.

• Il n'est pas très difficile de calculer l'intégrale $C''(t) = \int_0^\infty e^{-xt}(1-\cos(x))dx$. En effet, $C''(t) = \int_0^\infty e^{-xt}dx - \int_0^\infty e^{-xt}\cos(x)dx := \frac{1}{t} - I(t)$, et (classiquement) deux intégrations par parties dans $I(t)$ donnent $I(t) = \frac{t}{t^2+1}$ soit finalement $C''(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}, \quad \forall\, t > 0$.

(5) • Pour $t > 0 : |C(t)| \leq \int_0^\infty \left|(e^{-tx})\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right| dx \leq \int_0^\infty \dfrac{e^{-xt}}{2}dx = \frac{1}{2t} \underset{t\to 0_+}{\to} 0$, soit $\lim_{t\to 0_+} C(t) = 0 = C(0)$.

• Pour tout $t > 0$: $|C'(t)| = \left|\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\cos(x)-1}{x^2}dx\right| \leq \int_0^\infty e^{-xt}dx = \frac{1}{t}$ et par suite $\lim_{t\to+\infty} C'(t) = 0$.

(6) • Intégrons la formule obtenue en (4) on tire $C'(t) = \log(t) - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + \alpha, \quad \forall\, t > 0$. Où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour déterminer α il faut se souvenir qu'on a démontré dans la question (4) que $\lim_{t\to+\infty} C'(t) = 0$. Or $C'(t) = \log(t) - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + \alpha = -\frac{1}{2}\log(1+t^{-2}) + \alpha$ tends vers α lorsque t tends vers $+\infty$: donc $\alpha = 0$ et $C'(t) = \log(t) - \frac{1}{2}\log(1+t^2)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

• De même pour $t > 0$: $C(t) = \int_0^t \log(u)du - \int_0^t \frac{1}{2}\log(1+u^2)du + C(0) \underset{IP}{=} t\log(t) - t - \frac{t}{2}\log(1+t^2) + t - \arctan(t) + C(0)$. Soit après quelques simplifications et DL : $C(t) = -\frac{t}{2}\log(1+1/t^2) - \arctan(t) + C(0) + = -\frac{1}{2t} - \arctan(t) + C(0) + o(1/t)\ (t \to +\infty)$.
• En particulier $\lim_{t\to+\infty} C(t) = C(0) - \pi/2$ mais on a aussi vu à la question (5) que $\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0$. Donc $C(0) = \pi/2$ et finalement $C(t) = -\frac{t}{2}\log(1+1/t^2) - \arctan(t) + \pi/2$ si $t > 0$ et $C(0) = \pi/2$.

(7) $C(0) = \pi/2$ mais on a aussi $C(0) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \int_0^\infty \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}dx = \int_0^\infty \frac{2\sin^2(v)}{v^2}dv$. On a donc démontré que $\int_0^\infty \frac{2\sin^2(v)}{v^2}dv = \pi/2$; enfin, une dernière intégration par parties donne $\int_0^\infty \frac{2\sin^2(v)}{v^2}dv = \int_0^\infty \frac{2\sin(v)}{v}dv\pi/2$. CQFD. ■

26 janvier 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr