☯ ☢ ☯ Suites et Séries de Fonctions – Devoir 2 petit corrigé. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Pour $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose* $f_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.

(1) *Montrer que la série $\sum_1^\infty f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, on note F_α sa limite.*

(2) *Montrer que pour tout $\alpha > 1/2$, la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

(3) *Montrer que pour tout $0 < \alpha < 1/2$, la série converge normalement sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, $\forall\, a > 0$.*

(4) *Pour $0 < \alpha < 1/2$ et $N \in \mathbb{N}^\star$, montrer que* $F_\alpha(1/\sqrt{N}) \geq \sum_{n\geq 4N} f_n(1/\sqrt{N}) \geq \dfrac{\sqrt{N}}{2}\displaystyle\int_{4N}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$, *conclusion ?*

(5) *Préciser le domaine de continuité de F_α suivant les valeurs de α.*

(6) *Montrer que pour $\alpha > 1$, la série $\sum_1^\infty f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

(7) *Pour $0 < \alpha \leq 1$ montrer que la série $\sum_1^\infty f_n'$ converge normalement sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, $\forall\, a > 0$.*

(8) *Que peut-on en déduire sur la dérivabilité de F_α ? (pour $1/2 < \alpha \leq 1$ on pourra étudier le taux d'accroissement de F_α en 0.*

Corrigé

(1) Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Si $x \neq 0$ on aura $|f_n(x)| \sim 1/xn^{1+\alpha}$ qui est le terme général d'une série convergente puisque $\alpha > 0$ implique $1 + \alpha > 1$. La série $\sum_n f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

(2) $\alpha > 1/2$. f_n est impaire : on étudie ses variations sur $\mathbb{R}_+$ seulement. Comme $f_n'(x) = (1-nx^2)\cdot n^{-\alpha}(1+nx^2)^{-2}$ on en déduit immédiatement que $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = f_n(1\sqrt{n}) = 1/2n^{\alpha+1/2}$ terme général d'une série convergence car $1/2+\alpha > 1$. La convergence est bien normale sur $\mathbb{R}$ pour $\alpha > 1/2$.

(3) Si maintenant $0 < \alpha \leq 1/2$, les variations de f_n étudiées dans la question (2) nous assurent que pour tout entier n tel que $1/\sqrt{n} \leq a$: $\sup_{[a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$ qui est le terme général d'une série convergente vu (1). Pour $0 < \alpha \leq 1/2$, la convergence est donc normale sur $[a, +\infty[$ et par imparité sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

(4) Soit $0 < \alpha \leq 1/2$ et $N \geq 1$, par positivité des f_n on peut écrire : $F_\alpha(1/\sqrt{N}) = \sum_{n\geq 1} f_n(1/\sqrt{N}) \geq \sum_{n\geq 4N} f_n(1/\sqrt{N}) = \sum_{n\geq 4N} \frac{1}{\sqrt{N}n^\alpha(1+n/N)} \geq \sum_{n\geq 4N} \frac{1}{2\sqrt{N}n^{\alpha+1}N^{-1}} = \sum_{n\geq 4N} \frac{\sqrt{N}}{2n^{\alpha+1}}$ car $n/N \geq 4$ implique $n/N \geq 4 \geq 1$. Par comparaison avec une intégrale, on a aussi $1/n^{\alpha+1} \geq \int_{n-1}^{n} t^{-\alpha-1}dt$ qui nous donne finalement : $|F_\alpha(1/\sqrt{N})| \geq \sum_{n\geq 4N} \frac{\sqrt{N}}{2n^{\alpha+1}} \geq \frac{\sqrt{N}}{2} \sum_{n\geq 4N} \int_{n-1}^{n} t^{-\alpha-1}dt \geq \frac{\sqrt{N}}{2}\int_{4N}^{\infty} t^{-\alpha-1}dt = \frac{N^{-\alpha+1/2}}{2\alpha 4^\alpha}$. On en déduit que $\lim_N |F_\alpha(1/\sqrt{N})| = +\infty$ pour $0 < \alpha < 1/2$ et est $\geq 1/2\alpha 4^\alpha > 0$ pour $\alpha = 1/2$. Dans tous ces cas, $\lim_N F_\alpha(1/\sqrt{N}) \neq 0 = F_\alpha(0)$.

(5) $f_n \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc pour $\alpha > 1/2$ la question (2) assure la continuité de F_α sur $\mathbb{R}$. De même, pour $0 < \alpha \leq 1/2$ la question (3) assure la continuité de F_α sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ donc sur $\mathbb{R}^\star$. Enfin, toujours pour $0 < \alpha \leq 1/2$, F_α sera discontinue à l'origine d'après la question (4).

(6) On a vu (2) que $|f_n'(x)| = |(1-nx^2)\cdot n^{-\alpha}(1+nx^2)^{-2}|$. On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|f_n'(x)| = |(1-nx^2)\cdot n^{-\alpha}(1+nx^2)^{-2}| \leq |(1+nx^2)\cdot n^{-\alpha}(1+nx^2)^{-2} \leq 1/n^{\alpha}$ i.e. $\|f_n'\|_{\mathbb{R}} \leq 1/n^{\alpha}$. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ en résulte aussitot si $\alpha > 1$.

(7) Si $0<\alpha\leq 1$ et $|x|\geq a>0$ on aura : $|f_n'(x)| = |(1-nx^2)\cdot n^{-\alpha}(1+nx^2)^{-2}| \leq \frac{|1-na^2|}{n^{\alpha}(1+a^2n)^2} \sim \frac{1}{a^2n^{\alpha+1}}$ terme général d'une série convergente car $\alpha>0$: la convergence est normale sur $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ pour tout $a>0$.

(8) $f_n\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc pour la dérivabilité de F_α on peut appliquer le théorème de Weierstrass : les question (6) et (7) assurent que $F_\alpha\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ pour tout $\alpha>1$; pour $0<\alpha\leq 1$, F_α sera de classe C^1 sur $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ pour tout $a>0$ donc sur $\mathbb{R}^\star$. F_α est discontinue à l'origine pour $0<\alpha\leq 1/2$: elle n'y est pas dérivable ; pour $1/2<\alpha\leq 1$ nous n'en savons rien et on va étudier son taux d'accroissement : $F_\alpha(0)=0$ et par imparité on peut supposer $x>0$: $\frac{F_\alpha(x)-F_\alpha(0)}{x} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}(1+nx^2)} \geq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\alpha}(1+nx^2)} \geq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\alpha}(1+Nx^2)}$. En particulier pour $x_N = 1/\sqrt{N}$: $\frac{F_\alpha(x_N)-F_\alpha(0)}{x_N} \geq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n^{\alpha}} := S_N$. Comme $1/2<\alpha\leq 1$, S_α est la somme partielle d'une série de Riemann divergente : $\lim_N \frac{F_\alpha(x_N)-F_\alpha(0)}{x_N} = +\infty$ et F_α n'est pas dérivable en 0 pour $1/2<\alpha\leq 1$.

18 janvier 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr