Exercice 1. *Soient $0 < a < b < 1$ et $f \in \mathscr{C}([a,b])$. On prolonge f sur $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ en posant $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$, $f(x) = xf(a)/a$ pour $0 < x < a$, $f(x) = \frac{1-x}{1-b} f(b)$ pour $b < x < 1$ et $f(x) = 0$ si $x \geq 1$. Enfin, pour tout entier n on pose :*

$$J_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt, \quad P_n(x) = J_n^{-1} \int_0^1 f(t)(1-(t-x)^2)^n dt.$$

(1) *Soit $f \in \mathscr{C}([a,b])$, montrer que son prolongement à $\mathbb{R}$ est continu et donner une représentation graphique.*

(2) *Montrer que P_n est un polynôme en x de degré $\leq 2n$.*

(3) *Montrer que pour $x \in [0,1]$:*

$$P_n(x) = J_n^{-1} \int_{-1+x}^{1+x} f(t)(1-(t-x)^2)^n dt = J_n^{-1} \int_{-1}^{1} f(u+x)(1-u^2)^n du.$$

(4) *En déduire que pour tout $x \in [0,1]$: $P_n(x) - f(x) = J_n^{-1} \int_{-1}^{1} [f(u+x) - f(x)](1-u^2)^n du$.*

(5) *Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x+u) - f(x)| \leq \varepsilon/2$ pour tout $x \in [0,1]$ et $|u| < \delta$.*

(6) *Montrer que $|f(x+u) - f(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty u^2}{\delta^2}$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $|u| \geq \delta$.*

(7) *Montrer que $|f(x+u) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2\|f\|_\infty u^2}{\delta^2}$ pour tout $u \in [-1,1]$ et $x \in [0,1]$.*

(8) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$:*

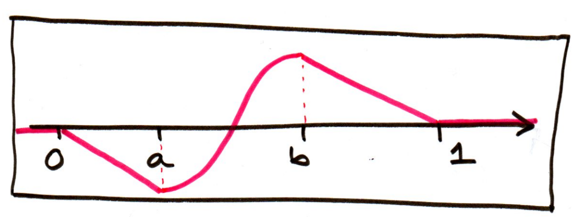
$$|P_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2 J_n} \int_{-1}^{1} u^2(1-u^2)^n du \leq \varepsilon/2 + \frac{\|f\|_\infty}{(n+1)\delta^2}.$$

(9) *En déduire que la suite $(P_n)_n$ converge uniformément vers f sur $a,b]$.*

(10) *Démontrer le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[\alpha,\beta]$ d'une suite de polynômes.*

Corrigé

(1) f est clairement continue sur $[a,b]$ et sur $\mathbb{R} \setminus [0,1]$; elle l'est aussi sur $[0,a]$ et $[b,1]$ puisque affinne reliant les points $(0,0)$ et $(a, f(a))$ et les points $(b, f(b))$ et $(1,0)$ (voir la figure).



(2) En développant la puissance $(1-(t-x)^2)^n$, la linéarité de l'intégrale implique que P_n est bien un polynôme.

(3) Comme f est nulle sur $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$ et comme $x \in [0,1]$, on peut écrire :

$$P_n(x) = J_n^{-1} \int_0^1 f(t)(1-(t-x)^2)^n dt = J_n^{-1} \int_{-1+x}^{1+x} f(t)(1-(t-x)^2)^n dt.$$

Et on fait alors dans la dernière intégrale le changement $v = t - x$:

$$P_n(x) = J_n^{-1} \int_{-1+x}^{1+x} f(t)(1-(t-x)^2)^n dt = J_n^{-1} \int_{-1}^{1} f(u+x)(1-u^2)^n du.$$

(4) $J_n^{-1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = 1$ donc avec la question précédente, on peut écrire pour $x \in [0,1]$:

$$P_n(x) - f(x) = J_n^{-1} \int_{-1}^{1} f(u+x)(1-u^2)^n du - f(x) \cdot J_n^{-1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = J_n^{-1} \int_{-1}^{1} [f(u+x) - f(x)](1-u^2)^n du.$$

(5) f est continue sur $\mathbb{R}$, donc uniformément continue sur $[-1,2]$ (théorème de Heine) donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $1 > \eta > 0$ tel que $|u| < \eta$ implique $|f(x+u) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$.

(6) f continue sur $\mathbb{R}$ est nulle en dehors de $[0,1]$: elle est donc bornée. On a donc $|f(x+u) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ pour tout x et $u \in [0,1]$. En particulier, $|f(x+u) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $|u| \geq \eta$ (puisque $|u| \geq \eta$ implique $|u|/\eta \leq 1$).

(7) En regroupant les questions (5) et (6) : $|f(x+u) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $u \in [-1,1]$.

(8) Avec (4) et (7) nous avons pour tout $x \in [0,1]$:

$$|P_n(x) - f(x)| \leq J_n^{-1} \int_{-1}^{1} |f(u+x) - f(x)|(1-u^2)^n du \leq \varepsilon/2 + \frac{2\|f\|_\infty}{J_n \eta^2} \int_{-1}^{1} u^2(1-u^2)^n du.$$

Une intégration partie donne facilement $\int_{-1}^{1} u^2(1-u^2)^n du = \frac{J_{n+1}}{2(n+1)}$ et $u \in [-1,1]$ implique $(1-u^2)^{n+1} \leq (1-u^2)^n$ qui assure à son tour $\frac{J_{n+1}}{2(n+1)} \leq \frac{J_n}{2(n+1)}$. Ainsi

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2\|f\|_\infty}{2(n+1)\eta^2}.$$

(9) Il suffit alors de choisir n suffisamment grand pour que $\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \leq \varepsilon/2$. L'inégalité dans (8) étant vraie pour tout $x \in [0,1]$ on en déduit que $\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$.

(10) Le théorème de Weierstrass est donc démontré pour $[a,b] \subset]0,1[$. Si $[a,b]$ est quelconque, il est l'image de l'intervalle $[1/3, 2/3]$ par une transformation affine $\varphi(t) = \alpha t + \beta$. Pour $f \in \mathscr{C}([a,b])$ la fonction $g(t) := f \circ \varphi(t)$ est continue sur $[1/3, 2/3] \subset]0,1[$: on peut donc lui appliquer le théorème de Weierstrass démontré dans les questions précédentes : il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes qui converge uniformément sur $[1/3, 2/3]$ vers g. Comme $\|g - P_n\| = \sup_{1/3 \leq t \leq 2/3} \|f(\varphi(t)) - P_n(t)| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n \circ \varphi^{-1}(x)| = \|f - P_n \circ \varphi^{-1}\|$, il en résulte que la suite $(P_n \circ \varphi^{-1})_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f. Mais φ est affine donc φ^{-1} aussi : un calcul élémentaire montre qu'alors $P_n \circ \varphi^{-1}$ est encore un polynôme et le théorème de Weierstrass est démontré dans toute sa généralité.

17 janvier 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr