1. Matrices, rang (généralités) et quelques systèmes

Exercice 1. *Deux matrices A et B vérifient*

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \quad et \quad BA = \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix}.$$

Déterminer x et y. En déduire A et B.

Exercice 2. *Calculer le rang des matrices suivantes et, lorsque cela est possible leur déterminant.*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Calculer les déterminants suivants :* $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}.$

Exercice 4. *Calculer le déterminant et le rang de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + y, z).$$

Exercice 5. *Montrer que pour tout a, b, c réels le déterminant* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$ *est nul. Déterminer le rang de cette matrice suivant les valeurs des paramètres a, b, c.*

Exercice 6. *Déterminer déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, *étudier son rang en fonction des paramètres a, b, c.*

Exercice 7. *Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? si oui préciser leur inverse, sinon leur rang.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8. *Calculer les déterminants suivants en précisant les valeurs des paramètres qui annulent ces déterminants.*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & a_n \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 9. *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, n scalaires distincts et $A := \mathrm{VDM}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = ((\alpha_i^{j-1})) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de Vandermonde associée. Montrer que A est inversible en interprétant le système $MX = O_{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.e*

Exercice 10. *Soient* $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ *telles que les matrices* $A, A+B, A+2B, A+3B$ *et* $A+4B$ *soient inversibles à matrices inverses à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *; en est-il de même pour* $A+2011B$ *?*

Exercice 11. *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$*. On désignera par* $\widehat{A}$ *la matrice obtenue à partir de* A *en remplacant pour tout* $1 \leq i \leq n$ *la* i*-ième colonne de* A *par la sommes des autres colonnes. On désigne par* $\widetilde{A}$ *la matrice déduite de* A *en retranchant pour tout* $1 \leq i \leq n$ *à la* i*-ième colonne de* A *la sommes des colonnes d'indices distincts de* i*. Exprimer en fonction de* $\det(A)$ *les déterminants* $\det(\widehat{A})$ *et* $\det(\widetilde{A})$*.*

Exercice 12. *Soit* n *un entier impair et* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice vérifiant* $A^2 = O_n$ *ou* $A^2 = I_n$*. Montrer que*

$$\det(A + I_n) \geq \det(A - I_n).$$

Exercice 13. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice de rang 1, montrer que* $\det(A+I_n) = trace(A)+1$.

Exercice 14. *Soit* n *un entier impair,* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ *telles que* $BA = O_n$*. Montrer que l'une des deux matrices* $A +{}^tA,\ B +{}^tB$ *n'est pas inversible.*

Exercice 15. *Soit* n *un entier pair,* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice antisymétrique et* $J \in M_n(\mathbb{R})$ *la matrice attila (avec des 1 partout...). Montrer que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \ :\quad \det(A + tJ) = \det(A).$$

Exercice 16. *Soient* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *et* $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right) \in M_{2n}(\mathbb{R})$*. Montrer que* $\det(M) \geq 0$.

Exercice 17.

Exercice 18. (1) *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$*, montrer que* $\det(I_n + A^2) \geq 0$.

(2) *Soient* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *deux matrices qui commutent. Si* $\det(A + B) \geq 0$ *montrer que* $\det(A^k + B^k) \geq 0$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^\star$*.*

2. calculs de Déterminants

Exercice 19. *Soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$*, calculer le déterminant le déterminant de Vandermonde :*

$$\Delta_n = V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 20. *Calculer le déterminant de la matrice* $A = ((a_{ij} = (i + j - 1)^n))_{1 \leq i,j \leq n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$*.*

Exercice 21. *Calculer le déterminant* $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 + a_n \end{vmatrix}$

Exercice 22. *Soit* $\varepsilon = e^{2i\pi/n}$ *et* $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$, $\quad C_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ & & & \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \end{pmatrix}$.

(1) *Calculer pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *le module et l'argument* $\det(A_n)$ *(on pourra commencer par calculer* A_n^2*).*

(2) *En déduire (calculer* $\det(CA_n)$*) la valeur du déterminant « circulant »* $\det(C_n)$.

Exercice 23. *Soit* $P \in \mathbb{C}[x]$ *de degré* $n-1 \geq 0$.

(1) *Montrer que tout polynôme* $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[x]$ *se décompose de manière unique sous la forme* $Q(x) = a_0P(x) + a_1P(x+1) + \cdots + a_{n-1}P(x+n-1)$.

(2) *En déduire pour tout réel* x *le déterminant*

$$\Delta = \begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \dots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & \dots & P(x+n+1) \\ \vdots & & & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \dots & P(x+2n) \end{vmatrix}$$

Exercice 24. *Soient* $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{C}[x]$ *vérifiant* $deg(P_i) = i$ *pour tout* $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. *Pour* $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, *exprimer au moyen d'un déterminant de Vandermonde le déterminant*

$$D = \begin{vmatrix} P_0(x_0) & P_1(x_0) & \dots & P_n(x_0) \\ P_0(x_1) & P_1(x_1) & \dots & P_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \dots & P_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Application : pour $\theta_0, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ *calculer*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_0) & \cos(2\theta_0) & \dots & \cos(n\theta_0) \\ 1 & \cos(\theta_1) & \cos(2\theta_1) & \dots & \cos(n\theta_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \cos(\theta_n) & \cos(2\theta_n) & \dots & \cos(n\theta_n) \end{vmatrix}.$$

On pourra commencer par démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *il existe un unique polynôme* $P_n \in \mathbb{R}[x]$ *vérifiant pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

Exercice 25. *Calculer le déterminant* $\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

Exercice 26. *Calculer le déterminant de la matrice* $A = ((a_{ij} = |i-j|))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$.

Devoir 2. A remettre la semaine du 27/02-03/03 2012.

Exercice 27. *Montrer que l'équation $A^2 = -I_3$ d'inconnue A, n'admet pas de solutions dans $M_3(\mathbb{R})$. Et dans $M_3(\mathbb{C})$?*

Exercice 28. *Déterminer le reste de la division euclidienne de $p(x) = x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ par le polynôme $x^3 - x$.*

Exercice 29. *On considère pour $a, b \in \mathbb{R}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_{a,b}) \quad \begin{cases} ax + y + z = \alpha \\ x + by + bz = \beta \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice $A_{a,b}$ du système et étudier son rang.*

(2) *Dans un repère Oab représenter les couples (a, b) tels que $A_{a,b}$ ne soit pas de rang maximal.*

(3) *Pour quels couple (a, b) le système $(\mathscr{S}_{a,b})$ admet-t-il une unique solution ?*

(4) ***Sans résoudre le système** que peut-on dire de l'ensemble des solutions du système lorsque $A_{a,b}$ est de rang maximal.*

(5) *Même question si $A_{a,b}$ n'est pas de rang maximal.*

(6) *Résoudre le système si $A_{a,b}$ n'est pas de rang maximal.*

(7) *Résoudre le système si $(a, b) = (2, -1)$.*

Exercice 30. *On considère pour $a \in \mathbb{C}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_a) \quad \begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x + a^2y + z = \beta \\ x + y + a^3z = \gamma \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice A_a du système et calculer son déterminant.*

(2) *Etudier le rang de A_a.*

(3) *Pour quelles valeurs de a le système admet-il une unique solution ? Préciser alors cette solution à l'aide de déterminants qu'il n'**est pas utile** de calculer.*

(4) *Résoudre le système lorsque $a = -1$.*

Exercice 31. *Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

(1) *Montrer que $\forall n \geq 2 \ : \ \Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$ (avec la convention $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 3$).*

(2) *En introduisant la suite de terme général $v_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}, (n \in \mathbb{N}^\star)$, montrer que $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.*