☯ ☢ ☯ Déterminants Systèmes – Feuille 1. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Résoudre les système linéaires suivants :*

$$\begin{cases} x+y+(1-m)z &= m+2 \\ (1+m)x-y+2z &= 0 \\ 2x-my+3z &= m+2. \end{cases}, \quad \begin{cases} x\cos 2\alpha + y\cos\alpha + z = & a \\ x\cos 2\beta + y\cos\beta + z = & b \\ x\cos 2\gamma + y\cos\gamma + z = & c. \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y+z+t &= a \\ x-y-z+t &= b \\ -x-y+z+t &= c \\ -3x+y-3z-7t &= d \end{cases}$$

Exercice 2. *Déterminer le reste de la division euclidienne de* $p(x) = x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ *par le polynôme* $x^3 - x$.

Exercice 3. *Soit* $A = ((a_{ij})) \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice telle que le module de tout élément diagonal soit strictement supérieur à la somme des modules des autres coefficients dans la même ligne, i.e.*

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| \cdots + |a_{in}|, \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Montrer que A *est inversible (considérer le système* $AX = 0_{\mathbb{R}^n}$*).*

Exercice 4. *Déterminer la boule (euclidienne) de* $\mathbb{R}^3$ *passant par les quatre points* $A_1 = (1,0,0), A_2 = (1,1,0), A_3 = (1,1,1), A_4 = (0,1,1)$.

Exercice 5. • *Résoudre les systèmes linéaires suivants en discutant s'il y a lieu des valeurs des paramètres réels.*

$$\begin{cases} x+2y &= 5 \\ x+3y &= 5 \\ x+7y &= \beta \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y-az &= 0 \\ x+ay-z &= 0 \\ x+(a+1)y+2z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ax+y+z &= 1 \\ x+ay+z &= a \\ x+y+az &= a^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+y-z &= 0 \\ x+2y+z &= 0 \\ 3x+y-2z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ x+2y+z &= -1 \\ 3x+y-2z &= 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ x+2y+z &= 0 \\ 3x+y-2z &= 2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. *Montrer que les vecteurs* $v_1 = (1,-2,0,3)$, $v_2 = (2,3,0,1)$, $v_3 = (2,-1,2,1)$ *forment une famille libre ; montrer que le vecteur* $v = (3,9,-4,-2)$ *appartient au sous espace* E *engendré par les trois vecteurs* v_1, v_2, v_3 *et déterminer les composantes de* v *dans cette base de* E.

Exercice 7. *Soient* F *et* G *les sous-espaces de* $\mathbb{R}^4$ *engendrés respectivement par* $\{v_1, v_2\}$ *et* $\{w_1, w_2\}$ *où*

$$v_1 = (1,-1,0,2), \; v_2 = (2,1,3,1), \; w_1 = (1,1,1,1), \; w_2 = (3,-4,4,2).$$

Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 8. *Soit* a *un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant :*

$$\mathcal{S}_a \; : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}$$

1) En fonction des valeurs du paramètre a*, déterminer si le système* $\mathcal{S}_a$ *peut :*

– *n'admettre aucune solution ;*
– *admettre exactement une solution ;*
– *admettre une infinité de solutions.*
2) Résoudre le système $\mathcal{S}_a$ lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 9. *Soient a, b, et c trois nombres réels.*
1) Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système suivant ait au moins une solution ?

$$\mathcal{S}_{abc} : \begin{cases} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{cases}$$

2) Est-ce que le système $\mathcal{S}_{abc}$ peut avoir une unique solution ?

Exercice 10. *Soit $(S) \iff AX = B$ un système linéaire incompatible. Montrer que les lignes de A sont liées.*

Exercice 11. *Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible à coefficients strictement positifs. Montrer que A^{-1} admet au plus $n^2 - 2n$ composantes nulles.*

Devoir 1. A remettre le Vendredi 27 Janvier 2012.

Exercice 12. *On considère pour $a, b \in \mathbb{R}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_{a,b}) \quad \begin{cases} ax & + & y & + & z & = & \alpha \\ x & + & by & + & bz & = & \beta \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice $A_{a,b}$ du système et étudier son rang.*
(2) *Dans un repère Oab représenter les couples (a, b) tels que $A_{a,b}$ ne soit pas de rang maximal.*
(3) *Pour quels couple (a, b) le système $(\mathscr{S}_{a,b})$ admet-t-il une unique solution ?*
(4) ***Sans résoudre le système*** *que peut-on dire de l'ensemble des solutions du système lorsque $A_{a,b}$ est de rang maximal.*
(5) *Même question si $A_{a,b}$ n'est pas de rang maximal.*
(6) *Résoudre le système si $A_{a,b}$ n'est pas de rang maximal.*
(7) *Résoudre le système si $(a, b) = (2, -1)$.*

Exercice 13. *On considère pour $a \in \mathbb{C}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_a) \quad \begin{cases} x & + & y & + & z & = & \alpha \\ x & + & a^2y & + & z & = & \beta \\ x & + & y & + & a^3z & = & \gamma \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice A_a du système et calculer son déterminant.*
(2) *Etudier le rang de A_a.*
(3) *Pour quelles valeurs de a le système admet-il une unique solution ? Préciser alors cette solution à l'aide de déterminants qu'il n'**est pas utile** de calculer.*
(4) *Résoudre le système lorsque $a = -1$.*

12 janvier 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr