I.N.P. **27 octobre 2011**

Fonctions d'une Variable Réelle
EXAMEN FINAL.

Durée 1h30, documents, calculatrices, téléphones interdits.
Les logarithmes sont tous népériens.

Exercice 1. ***(Cours).*** *(3 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.*

(1) *Ecrire la définition de « f est surjective ».*
(2) *Ecrire la définition de « f est n'est pas injective ».*
(3) *Ecrire la définition de « f est croissante ».*
(4) *Ecrire la définition de « f est n'est pas décroissante ».*
(5) *Ecrire la définition de « f est continue au point a ».*
(6) *Ecrire la définition avec les suites de « f n'est pas continue au point a ».*

Exercice 2. *(11 points) L'objectif de ce problème est l'étude de quelques propriétés des solutions continues de l'équation fonctionnelle $f \circ f = \exp$ (de telles fonctions existent, mais prouver leur existence est délicat en une heure). On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $f(f(x)) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

(1) (a) *Montrer que $e^x > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
  (b) *Montrer que $f(a) = a$ implique $e^a = a$.*
  (c) *En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution.*
  (d) *En déduire que $f(x) - x$ est de signe constant pour x réel.*
  (e) *Démontrer qu'il n'existe pas de réel a vérifiant $f(a) < a$.*
  (f) *Déduire que, pour tout réel x, $f(x) > x$.*
(2) (a) *Démontrer que pour tout réel x, $f(x) < e^x$.*
  (b) *En déduire que $f(0)$ appartient à l'intervalle $]0;1[$.*
  (c) *Démontrer que pour tout réel x, $f(e^x) = e^{f(x)}$.*
  (d) *Déterminer la limite de f en $+\infty$*
  (e) *Déterminer la limite de f en $-\infty$ et montrer que cette limite est strictement négative.*
(3) *Démontrer que f est injective sur $\mathbb{R}$.*
(4) *En déduire que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.*
(5) *Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

tournez la page SVP

Exercice 3. *(6 points) Calculer les limites suivantes :*

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin(x^2)}}{|x|}, & (2) & \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \\
(3) & \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sin(x)\tan(x)}, & (4) & \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log(x^4)}{\log(1+\log(x))}, \\
(5) & \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x\sin(x))}{x^2}, & (6) & \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)+\sin(5x)}{\sin(7x)-\sin(5x)}.
\end{array}
$$

☯ ☢ **Fin de l'épreuve** ☢ ☯

27 octobre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr

Corrigé.

Corrigé de l'exercice 1 : Voir le cours pour les définitions. Ensuite, f n'est pas injective s'il existe $a \neq b$ tels que $f(a) = f(b)$, elle n'est pas décroissante s'il existe $a < b$ tels que $f(a) < f(b)$ et enfin, elle n'est pas continue au point c s'il existe une suite $(c_n)_n$ convergente vers c telle que la suite $(f(c_n))_n$ ne converge pas vers $f(c)$.

Corrigé de l'exercice 2 : On suppose qu'il existe une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $f \circ f = \exp$.

(1) (a) Etudier $\varphi(x) = e^x - x$ pour en déduire que $e^x - x \geq 1 > 0$.
  (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$ alors $e^x = f(f(x)) = f(x) = x$.
  (c) Vu (1-a) et (1-b), l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution.
  (d) f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $f(x) - x$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
  (e) Avec la question précédente, ou bien $f(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou bien $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Supposons que l'on se trouve dans la première situation, et soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) < x$ implique $e^{f(x)} < e^x = f(f(x))$, soit en posant $u = f(x)$: $e^u < f(u)$. Comme $x < e^x$ sur $\mathbb{R}$, on aura $u < e^u < f(u)$ i.e. $u < f(u)$ ce qui est contraire à l'hypothèse.
  (f) (1-d) et (1-e) impliquent $f(x) > x$, pour tout réel x.

(2) (a) Sinon, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \geq e^a = f(f(a))$; soit en posant $b = f(a)$: $b \geq f(b)$ ce qui est exclus vu (1-f).
  (b) Les inégalités démontrées en (1-a) et (2-a) donnent pour $x = 0$:$0 < f(0) < e^0 = 1$.
  (c) $f(e^x) = f(f \circ f(x)) = f \circ f(f(x)) = e^{f(x)}$.
  (d) Vu (1-f) : $f(x) > x$ sur $\mathbb{R}$ implique $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
  (e) La question (2-c) assure la positivité de $f(e^x)$ pour tout x réel. Dans cette égalité, prenons le log et faisons tendre x vers $-\infty$, par continuité de f en 0 et du log en $f(0)$: $\log f(0) = \lim_{x \to -\infty} \log f(e^x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) < 0$ puisque $0 < f(0) < 1$.

(3) $f(a) = f(b)$ impliquent $e^a = f(f(a)) = f((b)) = e^b$ soit $a = b$ par injectivité de l'exponentielle : f est bien injective.

(4) Toute fonction continue et injective sur $\mathbb{R}$ est strictement monotone : c'est le cours.

(5) f strictement monotone ne peut alors être que croissante vu les limites au bornes du domaine calculées en (2-d) et (2-e). ■

Corrigé de l'exercice 3 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\sin(x^2)}}{|x|} = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \sqrt{x} + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\sin(x)\tan(x)} = \lim_{x \to 0} 3 \frac{x^2}{\sin^2(x)} \cos(x) = 3,$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log(x^4)}{\log(1 + \log(x))} \underset{u = \log(x)}{=} \lim_{u \to 0} \frac{4u}{\log(1+u)} = 4,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x \sin(x))}{x^2} = \lim_{x \to 0} 5 \cdot \frac{\sin(5x\sin(x))}{5x\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} = 5,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(7x) + \sin(5x)}{\sin(7x) - \sin(5x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(7x)}{x} + \frac{\sin(5x)}{x}}{\frac{\sin(7x)}{x} - \frac{\sin(5x)}{x}} = \frac{7+5}{7-5} = 6.$$

27 octobre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr