

Devoir 4 (à rendre les 4 ou 5 octobre en TD).

Exercice 1. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions périodiques vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Montrer successivement que :

- f et g ont la même période.
- f et g sont égales.

Exercice 2. • Montrer que l'équation $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $] -1, 1[$; même question pour $x^{29} + 14x^{17} - 7x^5 + 2 = 0$.

• Montrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 3. Déterminer toutes les applications $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $f(x)^2 = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'étant donnés $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si f est périodique de période $T > 0$, montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0 + T/2) = f(x_0)$.

Exercice 6. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. En considérant la fonction $g(x) = f(x) - x$, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Illustrez graphiquement ce résultat.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective; montrer que f est soit strictement croissante soit strictement décroissante. En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $(f \circ f)(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. On cherche toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $(f \circ f)(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pour cela on pose $\mathcal{E} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x\}$; montrer successivement que \mathcal{E} est non vide puis égal à $f(\mathbb{R})$. En déduire une méthode pour construire des solutions de l'équation fonctionnelle.

Exercice 9. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $(f \circ f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. Montrer que toute bijection $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ possède une infinité de points de discontinuité.

Exercice 11. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ prenant exactement deux fois chaque valeurs.

Exercice 12. Existe t'il une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} envoyant les rationnels dans les irrationnels et réciproquement? Même question sans l'hypothèse de continuité.

Exercice 13. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est au plus dénombrable.

Exercice 14. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x) \in \mathbb{Q} \iff f(x+1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Exercice 15. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue et surjective $f : [0, 1] \rightarrow]0, 1[$. Trouver une application $f :]0, 1[\rightarrow [0, 1]$ continue et surjective et montrer qu'un tel exemple ne peut être bijectif.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue envoyant les intervalles ouverts sur les intervalles ouverts. Montrer que f est strictement monotone.

Exercice 17. Vendredi à 6h00, le Lama Delon quitte la vallée pour rejoindre la Lamasserie dans la montagne. Le lendemain, à 6h00 il fait le trajet inverse et le retour dure exactement le même temps que l'aller. Montrer qu'il existe alors forcément un endroit sur le trajet en lequel le Lama Delon passe à l'aller et au retour à la même heure.

Exercice 18. Un coureur à pied parcourt (continument) 6km en 30 minutes. Montrer qu'à un moment dans sa course il court 1km en exactement une minute.

Exercice 19. • Etudier la continuité la continuité uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \log(x), \quad f(x) = \cotan(x), \quad f(x) = e^x \cos(1/x), \quad f(x) = e^{1/x}, \quad f(x) = \cos(x) \cos(\pi/x).$$

• Etudier la continuité la continuité uniforme sur l'intervalle $[0, +\infty[$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = x \sin(x), \quad f(x) = \sin^2(x), \quad f(x) = \sin(x^2), \quad f(x) = \sin(\sqrt{x}).$$

Exercice 20. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle nécessairement ses bornes ? Si de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ montrer que f atteint au moins une de ses bornes.

Exercice 21. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R} .

Exercice 22. Etudier la continuité la continuité uniforme sur \mathbb{R} de la fonction $f(x) = \arctan(x)$ et de $f(x) = x \sin(1/x)$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 23. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si f est périodique montrer que f est uniformément continue, bornée et atteint ses bornes ; montrer aussi que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $x_a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_a + a) = f(a)$.

Exercice 24. Montrer que la fonction $f(x) = \cos(x^2)$ n'est pas uniformément continue, en déduire qu'elle ne peut être périodique (voir aussi l'exercice 5 de la feuille 1).

Exercice 25. Soit f, g deux fonctions uniformément continues sur $[a, b]$ (resp. $[a, +\infty[$). Cela implique-t-il la continuité uniforme sur $[a, b]$ (resp. $[a, +\infty[$) des fonctions $f + g$, fg , $x \mapsto f(x) \sin(x)$?

Exercice 26. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; si f est bornée montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.