I.N.P. **Septembre 2011**

Fonctions d'une Variable Réelle – Feuille d'Exercices 3.

Devoir 3 (à rendre en TD le vendredi 30 septembre).

Exercice 1. *Démontrer proprement (avec des ε et η...) quelques propriétés vues en cours mais non démontrées : soient $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $c \in]a,b[$, si f et g sont continues au point c alors :*

(1) *f est bornée sur un voisinage de c.*

(2) *$f+g$ est continue au point c.*

(3) *$|f|$ est continue au point c.*

Exercice 2. (1) *Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $\varphi(x) = 0$ si $\notin \mathbb{Q}$ quel est l'ensemble des périodes de φ ?*

(2) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, périodique et non identiquement nulle. Montrer que la borne inférieure des périodes de f est strictement positive.*

(3) *Montrer que la fonction φ de la première question n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ de deux manières différentes.*

Exercice 3. *Soit $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}_+^\star$; montrer que :* $\lim_{x\to 0}\left(f(x) + \dfrac{1}{f(x)}\right) = 2 \implies \lim_{x\to 0} f(x) = 1.$

Exercice 4. *Déterminer les limites suivantes ou justifier leur non-existence :*

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}\right),\ \lim_{x\to 0} x\cos(x^{-1}),\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\sin(\sin(x))},\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x},\ \lim_{x\to\alpha_+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}},\ (\alpha \geq 0),\ \lim_{x\to 2}\frac{e^x - e^2}{x^2+x-6}.$$

Exercice 5. *Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ vérifiant :* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x/2)}{x} = 0$. *On se propose de montrer que* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$.

(1) *Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $0 < x < \eta$ implique $|f(x/2^{n-1}) - f(x/2^n)| < \varepsilon x/2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.*

(2) *En déduire que $|f(x) - f(x/2^m)| \leq 2\varepsilon x(1-2^{-m})$ pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$.*

(3) *Conclure.*

Exercice 6. *a) Montrer que pour $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$, *(commencer par $\alpha = 1$...).*

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log(x)}{x^\alpha} = 0 = \lim_{x\to 0_+} x^\alpha \log(x)$, $(\alpha > 0)$.

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$

Exercice 7. *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x},\ (a>0),\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x},\ (\alpha\in\mathbb{R}),\quad \lim_{x\to 0_+} x^{\sin(x)}\quad \lim_{x\to+\infty}(\log x)^{1/x},\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2(x)},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x-1)^{1/x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x\sin(x)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin(\tan(x^2)))))}{\tan(x^2)},\ \lim_{x\to 0_+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{\sin(x)}}$$

Exercice 8. *Soient $f(x)=\sin(x), g(x)=x-E(x),\ x\in\mathbb{R}$. Montrer que f et g sont périodiques mais que $h=f+g$ ne l'est pas.*

Exercice 9. *Soit $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x^2)=f(x)$. Montrer que f est constante.*

Exercice 10. *Déterminer toutes les applications $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $f(x)+f(2x)=0,\ x\in\mathbb{R}$.*

Exercice 11. *On se propose de déterminer toutes les fonctions $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues et vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy : $(\mathscr{E})\quad f(x+y)=f(x)+f(y),\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$.*

0) Montrer que $(\mathscr{E})$ admet des solutions.

Soit f une solution de $(\mathscr{E})$

1) Montrer que f est impaire.

2) Montrer que $f(nx)=nf(x),\ \forall\, x\in\mathbb{Z}$.

4) Montrer que $f(rx)=rf(x),\ \forall\, x\in\mathbb{Q}$.

3) Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=ax,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$ (vous pouvez utiliser le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels).

ℹ *Pour la culture $(\mathscr{E})$ admet aussi des solutions discontinues... mais c'est une autre histoire...*

21 septembre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr