I.N.P. **Septembre 2011**

◕ ☢ ◕ Fonctions d'une Variable Réelle, limites – Feuille d'Exercices 2. ◕ ☢ ◕

Devoir 2 (à rendre en TD le Vendredi 23/09).

(1) L'objectif de ce problème est de déterminer les solutions $f\ :\ \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ de l'équation fonctionnelle

$$(\bigstar)\qquad f(x)f(yf(x)) = f(x+y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(a) Soit $f\ : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ une telle solution.

(i) Montrer que $f \leq 1$ (s'il existe $a \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $f(a) > 1$, considérez $y = a(f(a)-1)^{-1}$).

(ii) En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(iii) On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $f(b) = 1$. Montrer que $f \equiv 1$.

(b) Dorénavant $f\ :\ \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ désignera une solution (s'il en existe) de l'équation $(\bigstar)$ vérifiant $f(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

(i) Montrer que f est strictement décroissante.

(ii) Montrer que f est injective.

(iii) Montrer que $f(x)f(yf(x)) = f(yf(x))f\big([x+y(1-f(x))]f(yf(x))\big)$.

(iv) En déduire que $x = [x+y(1-f(x))]f(yf(x))$.

(v) Montrer que f est de la forme $f_a(x) = \frac{1}{1+ax}$ où $a \geq 0$.

(vi) Résoudre l'équation fonctionnelle $(\bigstar)$.

(2) Déterminer les limites suivantes ($n \in \mathbb{N}, a, b > 0$) :

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0} x\left(E(1/x) + E(2/x) + \cdots + E(n/x)\right), \ \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{a}E(b/x).$$

Exercice 1. *Que dire des fonctions $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant une des conditions ci-dessous ?*

a) $\forall\,\eta > 0,\ \exists \varepsilon > 0\ :\ |x-2| < \eta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon.$

b) $\exists \varepsilon > 0,\ \forall\,\eta > 0\ :\ |x-2| < \eta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon.$

c) $\exists \varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0\ :\ |x-2| < \eta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon.$

d) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall\,\eta > 0\ :\ |x-2| < \eta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon.$

e) $\exists \eta > 0,\ \forall\,\varepsilon > 0\ :\ |x-2| < \eta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon.$

f) $\exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, B > 0\ :\ x > B \implies f(x) > A.$

g) $\forall\, B > 0,\ \exists\, A \in \mathbb{R}\ :\ x > B \implies f(x) > A.$

h) $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0 x < A \implies |f(x) - 1| < \varepsilon.$

i) $\forall A \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0 x < A \implies |f(x) - 1| < \varepsilon.$

Exercice 2. (1) *Calculer les limites suivantes, ou prouver quelles n'existent pas :*

$$\lim_{x\to 0} x\cos(1/x),\ \lim_{x\to 0} xE(1/x),\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos(x))}{\sin(\sin x)},\lim_{x\to 0}\frac{E(x)}{x},\lim_{x\to 0} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1}\right).$$

(2) *Pour* $a\in\mathbb{R}$ *calculer* $\lim_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$, *puis* $\lim_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$, $n\geq 4$.

(3) *Calculer les limites suivantes : Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x\sin(\sin(x))},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin(\tan(\sin(x^2))))}{\sin(x^2)},\ \lim_{x\to 0_+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{\sin(x)}}$$

Exercice 3. • *Montrer avec « les* ε *et* η *» que :*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1,\qquad \lim_{x\to 0_+}\sqrt{x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}e^{-x+\pi}=0.$$

.

• *Pour* $a\in\mathbb{R}$ *calculer* $\lim_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$, *puis* $\lim_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$, $n\geq 4$.

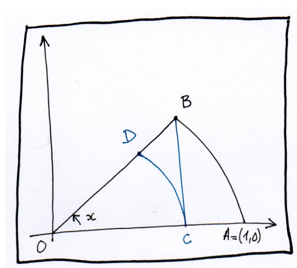
• *Montrer que tout fonction* $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *périodique et admettant une limite finie en* $+\infty$ *est constante.*

• *Soit* $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *vérifiant* $\lim_{+\infty}f(x)=+\infty$ *et* $g\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction bornée ; que dire de* $\lim_{+\infty}f(x)g(x)$ *et* $\lim_{+\infty}f(x)+g(x)$ *?*

Exercice 4. *Quelques dernières limites :* $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=?$ *(idem en* $-\infty$*),* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0}xE(x^{-1})$, $\lim_{x\to 0_+}\sqrt{x}E(x^{-1})$, $\lim_{x\to 0}x^2\left(1+2+3+\cdots+E\left(|x|^{-1}\right)\right)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(x)}{x+2}$.

Exercice 5. *Soit* $f(x)=\begin{cases}\sin(x^{-1}), & \text{si } x\in\mathbb{R}^\star\\ 0, & \text{si } x=0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 1, & \text{si } x=0\end{cases}$, $f_1(x)=xf(x), g_1(x)=xg(x)$. *Etudier les limites à l'origine de ces fonctions et esquisser leur graphe...*

Exercice 6. *On définit pour* $x\in\mathbb{R}$ *la fonction sinus de manière trigonométrique (voir figure) but de cet exercice est de montrer « proprement » la formule classique* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.



En observant bien la figure, montrer que

$$\frac{x\cos^2(x)}{2}\leq\frac{\sin(x)\cos(x)}{2}\leq\frac{x}{2},\quad \forall\, 0<x<\pi/2.$$

(« rappel » : l'aire d'un secteur angulaire d'angle α *et de rayon* r *est* $\alpha r^2/2$*) et conclure. En déduire la dérivée des fonctions sinus et cosinus.*

13 septembre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr