I.N.P. **Septembre 2011**

☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle – Feuille d'Exercices Semaine 1. ☯ ☢ ☯

Nous ne traiterons que quelques exercices (principalement ceux marqués du symbole 🛑 *), il est par contre essentiel que vous cherchiez* ***tous*** *les exercices de la feuille (il n'est pas spécialement important de trouver les exercices, mais il est* ***fondamental*** *d'y réfléchir assez longtemps dessus...) ; n'hésitez pas à me contacter si vous êtes bloqués...*

Devoir 1 (à rendre en cours mercredi 14/09/2012).

(1) Montrer par récurrence sur l'entier n que $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

(2) Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$, on pose $A+B := \{a+b,\ a \in A, b \in B\}$, $-A := \{-a,\ a \in A\}$. Montrer que $\inf(-A) = -\sup(A)$ et $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

(3) Si $A \subset \mathbb{R}$ est majorée, montrer que sa borne supérieure est unique.

(4) f désigne une application de E dans F. A est un sous-ensemble non vide de E et B un sous-ensemble non-vide de F. Justifier les inclusions

(a) $f(f^{-1}(B)) \subset B$;

(b) $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(c) A-t-on égalité en général ?

Exercice 1. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose $\mathscr{E}_n := \{k + \frac{k}{n},\ k \in \mathbb{N}^\star\}$.*

(1) *Montrer que $\mathscr{E}_n$ est minoré et $\inf \mathscr{E}_n := \inf\{k + \frac{k}{n},\ 1 \leq k \leq n\}$.*

(2) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\inf \mathscr{E}_n \geq \sqrt{4n}$. Etudier les cas d'égalité.*

Exercice 2. 🛑 *Soit $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide tel que $\sup \mathscr{S} \notin \mathscr{S}$. Soit $x < \sup \mathscr{S}$, montrer qu'il existe une infinité d'éléments de $\mathscr{S}$ entre x et $\sup \mathscr{S}$.*

Exercice 3. 🛑 *Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions majorées sur X. Montrer que $\sup_{x \in X} f(x) + g(x) \leq \sup_{x \in X} f(x) + \sup_{x \in X} g(x)$. En considérant $f(x) = \sin(x),\ g(x) = \cos(x), X = \mathbb{R}$ montrer que l'inégalité peut parfois être stricte. Ceci est-il en contradiction avec l'égalité vue en cours : $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$?*

Exercice 4. *Pour $x \in \mathbb{R}$ on admet qu'il existe un unique entier relatif n vérifiant $n \leq x \leq n+1$. C'est la partie entière de x, on la note $E(x)$. Montrer que :*
- $x \leq y \implies E(x) \leq E(y)$.
- $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ x \in \mathbb{R}\ :\ E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.
- *Montrer que* $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star\ :\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1/2\sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. *En déduire la partie entière de* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)$.

Exercice 5. • *Soit* $A \subset \mathbb{R}$ *une partie majorée. Si* $\sup(A) > 0$ *montrer qu'il existe* $a \in A$ *tel que* $a > 0$.
• *Soient* A, B *deux parties non vides bornées de* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $A \cup B$ *est non vide et bornée et préciser* $\sup(A \cup B)$ *et* $\inf(A \cup B)$.
• *Si* $B \subset A$ *et* A *bornée Montrer que* B *est bornée et comparer* $\sup A, \sup B, \inf A, \inf B$.

Exercice 6. • *Si* f *est impaire et* $0 \in A$ *montrer que* $f(0) = 0$.
• *Montrer que toute fonction* $f \ : \ A \to \mathbb{R}$ *se décompose de manière unique sous la forme* $f = g + h$ *avec* g *paire et* h *impaire.*

Exercice 7. • *Les fonctions* $f(x) = \cos(x^2)$ *et* $g(x) = \sin(x^2)$ *sont-elles périodiques ?*
• *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 1$ *si* $x \in \mathbb{Q}$ *et* $f(x) = 0$ *si* $\notin \mathbb{Q}$ *quel est l'ensemble des périodes de* f *?*

Exercice 8. • *Soient* E, F, G *trois ensembles et* $f \ : \ E \to F, g \ : \ F \to G$. *Si* $g \circ f$ *est injective montrer que* f *est injective. Si* $g \circ f$ *est surjective montrer que* g *est surjective.*
• *Montrer que la composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).*
• *La somme, le produit de deux injections (resp. surjections, bijections) est-elle encore une injection (resp. surjection, bijection) ?*

Exercice 9. *Soit* $f \ : \ E \to F$ *une application. Montrer les équivalences :*
• $(\forall X \in \mathscr{P}(E) \ : \ f^{-1}(f(X)) = X) \iff (f$ *est injective* $)$.
• $(\forall Y \in \mathscr{P}(F) \ : \ f(f^{-1}(Y)) = Y) \iff (f$ *est surjective* $)$.

Exercice 10. *Soit* $f : X \to Y$. *Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*
• f *est injective.*
• *Pour tous* A, B *de* X, *on a* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 11. *Soit* $f : E \to F$. *Montrer que* f *est bijective si et seulement si, pour tout* A *de* $\mathcal{P}(E)$, *on a* $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ *(*$\overline{A}$ *désigne le complémentaire de* A*).*

Exercice 12. *Soient* E *un ensemble,* $\mathscr{P}(E)$ *l'ensemble de ses parties, et* A *et* B *deux parties de* E. *On définit*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

(1) *Montrer que* f *est injective si et seulement si* $A \cup B = E$.
(2) *Montrer que* f *est surjective si et seulement si* $A \cap B = \varnothing$.
(3) *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* A *et* B *pour que* f *soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.*

Exercice 13. *Soit* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, $(n, p) \mapsto 2^n(2p + 1)$. *Démontrer que* f *est une bijection. En déduire une bijection de* $\mathbb{N}^2$ *sur* $\mathbb{N}$.

5 septembre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr

Exercice 14. *Soit $f : X \to Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*
• *f est injective.*
• *Pour tous A, B de X, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.*

Corrigé :

$1 \implies 2$: D'abord, une inclusion est toujours vérifiée : prenons en effet $y = f(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $y \in f(A)$ puisque $y = f(x)$ avec $x \in A$. De même, $y \in f(B)$. On en déduit que $y \in f(A) \cap f(B)$. Réciproquement, si $y \in f(A) \cap f(B)$, alors il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$ et $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Mais puisque f est injective, on a $a = b$, et donc $a \in A \cap B$. On en déduit que $y \in f(A \cap B)$.

$2 \implies 1$: Soit a et b tels que $f(a) = f(b) = y$. Prenons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Remarquons que $f(A) = f(B) = \{y\}$. Alors, on a $f(A \cap B) = \{y\}$. En particulier, $A \cap B \neq \varnothing$, et donc $a = b$. ■

Exercice 15. *Soit $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour tout A de $\mathcal{P}(E)$, on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ ($\overline{A}$ désigne le complémentaire de A).*

Corrigé : Pour l'implication directe, on suppose que f est bijective, et prenons A un élément de $\mathcal{P}(E)$. On doit montrer une double inclusion. Soit d'abord x dans $f(\overline{A})$. Alors $x = f(y)$ où $y \in \overline{A}$. Supposons que $x \in f(A)$. Alors $x = f(z)$ où $z \in A$. Mais alors, on a $f(y) = f(z)$ et par injectivité de f, on a $y = z$. Comme y est élément de A et z est élément de son complémentaire, ceci est impossible et donc $x \notin f(A)$, c'est-à-dire qu'on a prouvé que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
Prouvons maintenant l'autre inclusion. Soit $x \in \overline{f(A)}$. Alors, puisque f est surjective, il existe y élément de E tel que $x = f(y)$. Mais y ne peut pas être élément de A sinon x serait élément de $f(A)$ ce qui n'est pas. Et donc y est élément de $\overline{A}$ et $x \in f(\overline{A})$.
Etudions maintenant l'implication réciproque, c'est-à-dire qu'on suppose que pour tout A de $\mathcal{P}(E)$, on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Prouvons d'abord que ceci entraine que f est injective. En effet, pour x, y tels que $f(x) = f(y)$, supposons $x \neq y$. Posons $A = \{x\}$. On a $y \in \overline{A}$ et donc $f(y) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Or, $f(A) = \{f(x)\}$, et donc $f(y) \neq f(x)$, une contradiction.
Prouvons enfin que f est surjective. Par hypothèse appliquée à $A = E$, on sait que $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$. Mais $f(\overline{E}) = f(\emptyset) = \emptyset$, et donc $\overline{f(E)} = \emptyset$ ce qui, en prenant le complémentaire, se traduit en $f(E) = F$, c'est-à-dire que f est surjective. ■

Exercice 16. *Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties, et A et B deux parties de E. On définit*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

(1) *Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.*
(2) *Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.*
(3) *Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.*

Corrigé :

(1) Pour démontrer le sens direct, on raisonne par contraposée : si $A \cup B \neq E$, on prend $x \in E \backslash (A \cup B)$ et $X = \{x\}$. Alors $f(X) = (X \cap A, X \cap B) = (\varnothing, \varnothing)$ car x n'appartient ni à A ni à B. D'autre part, $f(\varnothing) = (\varnothing, \varnothing)$. Donc $f(X) = f(\varnothing)$ alors que $X \neq \varnothing$: f n'est pas injective.
Pour le sens réciproque, remarquons que pour tout $X \subset E$, puisque $A \cup B = E$, on a
$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B).$$
Ainsi, si $X, X' \subset E$ sont tels que $f(X) = f(X')$, c'est-à-dire $X \cap A = X \cap A'$ et $X \cap B = X \cap B'$, on a
$$X = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B) = X'.$$
Ainsi, f est injective.

(2) Supposons d'abord que f est surjective et prenons $x \in A$. Alors il existe $X \subset E$ tel que $f(X) = (\{x\}, \varnothing)$. Alors, on a $X \cap B = \varnothing$ et $x \in X \cap A$. Ainsi, $x \in X$ et donc $x \notin B$. Ainsi, on a $A \cap B = \varnothing$.
Réciproquement, si $A \cap B = \varnothing$, et prenons $A' \subset A$ et $B' \subset B$. Alors, posons $X = A' \cup B'$. Puisque $A \cap B = \varnothing$, on a $X \cap A = A'$ et $X \cap B = B'$ et donc $f(X) = (A', B')$: f est surjective.

(3) D'après les questions précédentes, on a f bijective si et seulement si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$, ie si (A, B) est une partition de E. La bijection réciproque a été établie à la question précédente et est donnée par $(A', B') \mapsto A' \cup B'$.
■

Exercice 17. *Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, $(n, p) \mapsto 2^n(2p+1)$. Démontrer que f est une bijection. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.*

Corrigé : Remarquons d'abord que f est bien à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Prouvons ensuite que f est injective. Soient (n,p) et (m,q) deux éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $f(n,p) = f(m,q)$. Alors on a $2^n(2p+1) = 2^m(2q+1)$. Supposons par exemple $n \geq m$. Alors on obtient

$$2^{n-m}(2p+1) = 2q+1.$$

Si $n \neq m$, le terme de gauche est pair et celui de droite est impair, une contradiction. Donc $n = m$. On obtient alors $2p+1 = 2q+1$, soit aussi $p = q$. Finalement, on a bien $(n,p) = (m,q)$ et donc f est injective. Prouvons ensuite que f est surjective. Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Alors l se décompose en produit de facteurs premiers

$$l = 2^n p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

avec p_i, $i \geq 2$, des nombres premiers impairs. Le produit de nombres impairs étant impair, on sait que $p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ est impair et s'écrit donc $2p+1$, avec $p \in \mathbb{N}$. On a donc $l = 2^n(2p+1) = f(n,p)$ et f est surjective. Pour trouver une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, il suffit de composer avec une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$, par exemple l'application $n \mapsto n-1$. Ainsi, l'application $g : (n,p) \mapsto 2^n(2p+1) - 1$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. ■