Soit $a \in [0,1]$. On se propose de déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues à l'origine et vérifiant $f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) = x^2$ pour tout réel x.

(1) Montrer que ce problème n'a pas de solutions si $a = 1$.

On suppose désormais $0 < a < 1$ *et soit* f *une solution.*

(2) Soit $n \geq 1$, en écrivant l'égalité vérifiée par f successivement pour $x, ax, a^2x, \dots, a^nx^n$, montrer que $f(x) - f(ax) - f(a^{n+1}x) + f(a^{n+2}x) = x^2 \sum_{k=0}^{n} a^{2k} = \frac{x^2(1-a^{2n+2})}{1-a^2}$.

(3) En déduire que $f(x) - f(ax) = \frac{x^2}{1-a^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(4) Montrer que $f(x) - f(a^{n+1}x) = \frac{x^2}{1-a^2} \sum_{k=0}^{n} a^{2k} = \frac{x^2(1-a^{2n+2})}{(1-a^2)^2}$.

(5) En déduire que $f(x) = \frac{x^2}{(1-a^2)^2} + C \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ où $C \in \mathbb{R}$.

(6) Conclure.

Solution : • $a = 1$ donne $0 = x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$: donc, si une telle fonction existe $a \in [0,1[$.
• Soit $a \in [0,1[$. Supposons qu'une telle fonction existe, on écrit la relation successivement pour $x, ax, a^2x, \dots, a^nx^n$:

$$\begin{aligned}
f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) &= x^2\\
f(ax) - 2f(a^2x) + f(a^3x) &= a^2x^2\\
f(a^2x) - 2f(a^3x) + f(a^4x) &= a^4x^2\\
\dots &= \dots\\
f(a^nx) - 2f(a^{n+1}x) + f(a^{n+2}x) &= a^{2n}x^2.
\end{aligned}$$

On somme ces inégalités :

$$f(x) - f(ax) - f(a^{n+1}x) + f(a^{n+2}x) = x^2 \sum_{k=0}^{n} a^{2k} = \frac{x^2(1-a^{2n+2})}{1-a^2}$$

et on fait tendre n vers $+\infty$ comme $a \in [0,1[$ et f est continue en 0 il reste

$$f(x) - f(ax) = \frac{x^2}{1-a^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

On recommence maintenant cette procédure avec cette formule : on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(ax) &= \frac{x^2}{1-a^2}\\
f(ax) - f(a^2x) &= \frac{a^2x^2}{1-a^2}\\
f(a^2x) - f(a^3x) &= \frac{a^4x^2}{1-a^2}\\
\dots &= \dots\\
f(a^nx) - f(a^{n+1}x) &= \frac{a^{2n}x^2}{1-a^2},
\end{aligned}$$

soit $f(x) - f(a^{n+1}x) = \frac{x^2}{1-a^2}\sum_{k=0}^n a^{2k} = \frac{x^2(1-a^{2n+2})}{(1-a^2)^2}$. Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$ et on trouve

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-a^2)^2} + f(0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Il ne faut pas oublier maintenant de vérifier qu'une telle fonction est bien solution de l'équation fonctionnelle initiale, ce qui se vérifie sans peine. CQFD. $\blacksquare$

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr