☯ ☢ ☯ INP – Continuité – Petit Corrigé du Devoir 2. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *L'objectif de ce problème est de déterminer les solutions $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ de l'équation fonctionnelle*

$$(\bigstar) \qquad f(x)f(yf(x)) = f(x+y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(1) *Soit $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ une telle solution.*
   - (a) *Montrer que $f \leq 1$ (s'il existe $a \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $f(a) > 1$, considérez $y = a(f(a)-1)^{-1}$).*
   - (b) *En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.*
   - (c) *On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $f(b) = 1$. Montrer que $f \equiv 1$.*

(2) *Dorénavant $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ désignera une solution (s'il en existe) de l'équation $(\bigstar)$ vérifiant $f(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$.*
   - (a) *Montrer que f est strictement décroissante.*
   - (b) *Montrer que f est injective.*
   - (c) *Montrer que $f(x)f(yf(x)) = f(yf(x))f\big([x+y(1-f(x))]f(yf(x))\big)$.*
   - (d) *En déduire que $x = [x+y(1-f(x))]f(yf(x))$.*
   - (e) *Montrer que f est de la forme $f_a(x) = \frac{1}{1+ax}$ où $a \geq 0$.*
   - (f) *Résoudre l'équation fonctionnelle $(\bigstar)$.*

Solution :

(1)
   - (a) S'il existe $a \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $f(a) > 1$, posons $y = a(f(a)-1)^{-1} \in \mathbb{R}_+^\star$. On a alors $f(a)f(yf(a)) = f(a+y) = f(a+a(f(a)-1)^{-1}) = f(yf(a))$. Soit $f(yf(a))\,(f(a)-1) = 0$ ce qui est absurde puisque $f(a) > 1$ et $f > 0$.
   - (b) Soient $0 < x < x' = x+y$ avec $y > 0$. Vu ce qui précède $f(yf(x)) \leq 1$ donc $f(x') = f(x+y) = f(x)f(yf(x)) \leq f(x)$. f est bien décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   - (c) On suppose qu'il existe $b > 0$ tel que $f(b) = 1$. Comme f est ≤ 1 et décroissante on a déjà $f \equiv 1$ sur $]0, b]$. Avec $(\bigstar)$ on a $f(y) = f(b+y)$, $\forall\, y > 0$. En particulier pour tout $n \geq 1$: $1 = f(b) = f(2b) = \ldots f(nb)$. comme f est décroissante, ceci implique que f est constante et égale à 1 sur $[1, +\infty[$. $f \equiv 1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(2)
   - (a) Si $f < 1$ en reprenant mot à mot la démonstration de la question (1-b) on prouve que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   - (b) Si f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ alors f est injective sur $\mathbb{R}_+^\star$ (il suffit de l'écrire).
   - (c) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x)f(yf(x)) &= f(x+y) = f(x+y(1-f(x))+yf(x)) \\ &= f\left(\underbrace{yf(x)}_{a} + \underbrace{x+y(1-f(x))}_{b}\right) = f(a)f(bf(a)) \\ &= f(yf(x))f\big([x+y(1-f(x))]f(yf(x))\big) \end{aligned}$$

.

   - (d) $f(x)f(yf(x)) = f(yf(x))f\big([x+y(1-f(x))]f(yf(x))\big)$ implique (comme f est non nulle)$f(x) = f\big([x+y(1-f(x))]f(yf(x))\big)$ soit, puisque f est injective $x = [x+y(1-f(x))]f(yf(x))$.
   - (e) Nous avons pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$: $x = [x+y(1-f(x))]f(yf(x))$. Faisons $x = 1$ et $y = t/f(1)$. On tire immédiatement $f(t) = f_a(t) = \frac{1}{1+at}$ avec $a = (1-f(1))/f(1) > 0$.
   - (f) Réciproquement on vérifie facilement que toutes ces fonctions f_a sont solutions de l'équation.

Exercice 2. *Déterminer les limites suivantes* $(n \in \mathbb{N}, a, b > 0)$ *:*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0} x\left(E(1/x)+E(2/x)+\cdots+E(n/x)\right), \ \lim_{x\to 0_+}\frac{x}{a}E(b/x).$$

Solution : • La fonction logarithme étant dérivable en $x = 1$, on a $\lim_{x\to 0}\log(1+x)/x = 1$ par suite $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\exp[\log(1+x)/x] = e$ par composition.
• Comme pour tout $1 \leq k \leq n$: $kx - 1 < E(k/x) \leq kx$, on a pour $x > 0$, l'encadrement

$$x\left(\frac{1}{x}-1+\frac{2}{x}-1+\cdots+\frac{n}{x}-1\right) < x\left(E(1/x)+E(2/x)+\cdots+E(n/x)\right) \leq x\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\cdots+\frac{n}{x}\right),$$

soit

$$x\left(\frac{n(n+1)}{2x}-n\right) < x\left(E(1/x)+E(2/x)+\cdots+E(n/x)\right) \leq x\frac{n(n+1)}{2x}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit immédiatement que la limite demandée vaut $n(n+1)/2$ (si $x < 0$ l'inégalité est juste inversée).
• Comme plus haut (tout le monde est > 0) : $x(b/x - 1)/a = b/a - x/a < \frac{x}{a}E(b/x) \leq b/a$, et encore une fois avec les gendarmes, la limite est b/a

Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr