☯ ☢ ☯ INP – Continuité – Petit Corrigé du Devoir 1. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Montrer par récurrence sur l'entier n que $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ où $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.*

Solution : Si $n = 1$ on a $|a_1| = |a_1|$ et il n'y a rien à démontrer. Si $n = 2$ on a $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$: on retrouve la célèbre inégalité triangulaire. Par récurrence sur $n \geq 1$ supposons la propriété vraie jusqu'au rang n. Alors $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| \leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ (on a appliqué les propriété (P_2) puis (P_n)) soit (P_{n+1}). Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$. ■

Exercice 2. *Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$, on pose $A + B := \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$, $-A := \{-a,\ a \in A\}$. Montrer que $\inf(-A) = -\sup(A)$ et $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.*

Solution : • Notons $i = \inf(-A)$. Si $i \in \mathbb{R}$ alors i est un minorant de $-A$: $(\forall c \in -A\ :\ i \leq c)$ soit encore $(\forall a \in A\ :\ i \leq -a)$ i.e. $(\forall a \in A\ :\ a \leq -i)$. $-i$ est donc bien un majorant de $-A$. Par la caractérisation de la borne inférieure on a aussi : $(\forall \varepsilon > 0, \exists c_\varepsilon = -a_\varepsilon \in -A\ :\ c_\varepsilon = -a_\varepsilon < i + \varepsilon)$ soit $(\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A\ :\ a_\varepsilon > -i - \varepsilon)$. Cette dernière propriété assure bien que le majorant $-i$ de $-A$ est bien le plus petit des majorants : $-i = -\inf(A) = \sup(-A)$. On traite encore plus simplement les cas où $\inf(A) = \pm\infty$.
• Avec la question précédente : $\inf(A + B) = -\sup(-A - B) = -\sup(-A) - \sup(-B) = \inf(A) + \inf(B)$. ■

Exercice 3. *Si $A \subset \mathbb{R}$ est majorée, montrer que sa borne supérieure est unique.*

Solution : Sinon A admet au moins deux bornes supérieures $-\infty \leq b_1 < b_2$. On choisit alors $b_2 < b_3 < b_1$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $b_3 = b_1 - \varepsilon$. b_1 étant une borne supérieure de A, par le cours il existe $a \in A$ tel que $b_2 < b_1 - \varepsilon < a \leq b_1$. b_2 n'est donc pas un majorant, contradiction et CQFD. ■

Exercice 4. *f désigne une application de E dans F. A est un sous-ensemble non vide de E et B un sous-ensemble non-vide de F. Justifier les inclusions*

(1) *$f(f^{-1}(B)) \subset B$;*
(2) *$A \subset f^{-1}(f(A))$.*
(3) *A-t-on égalité en général ?*

Solution :

(1) Prenons $x \in f(f^{-1}(B))$. Alors, il existe y élément de $f^{-1}(B)$ tel que $x = f(y)$. Puisque y est dans $f^{-1}(B)$, on sait que $f(y)$ est élément de B. Donc x est élément de B ce qui prouve l'inclusion.
(2) Prenons x élément de A. Alors $f(x)$ est élément de $f(A)$, ce qui signifie exactement que x est élément de $f^{-1}(f(A))$.
(3) Prenons $f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$, $1 \mapsto 1$ et $2 \mapsto 1$ et $B = \{1, 2\}$. Alors $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$ et $f(f^{-1}(B)) = \{1\}$ qui est différent de B.
Pour l'autre exemple, prenons $A = \{1\}$. Alors $f(A) = \{1\}$ et $f^{-1}(f(A)) = \{1, 2\}$ qui est différent de A. ■

---

14 septembre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr