Corrigé du second exercice, (d'après Mines MP 2004 : première pomposition

---

Calcul d'une intégrale

I

1. φ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$. Lorsque t tend vers 0, $\arctan t \sim t$ et $e^{\pi t} - 1 \sim \pi t$ donc $\varphi(t)$ tend vers $1/\pi$.

$$\boxed{\varphi \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ en posant } \varphi(0) = 1/\pi}$$

2. φ est de classe C^1 sur D, de dérivée $\varphi'(t) = \dfrac{e^{\pi t}}{(e^{\pi t}-1)^2}\psi(t)$ où ψ est la fonction de l'énoncé. $\varphi'(t)$ est du signe de $\psi(t)$.
   Etudions les variations de ψ : ψ est C^1 sur D et $\psi'(t) = -\dfrac{1-e^{-\pi t}}{(1+t^2)^2}[\pi(1+t^2)+2t] < 0$ sur D. ψ est ainsi strictement décroissante sur D et de limite 0 en 0, donc elle est strictement négative sur D et φ' aussi.
   φ est donc strictement décroissante sur D et de limite $1/\pi$ en 0 :

$$\boxed{\sup_D \varphi(t) = 1/\pi\ .}$$

3. φ est continue sur D.
   Elle se prolonge par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0,1]$.
   Quand t tend vers $+\infty$, $\varphi(t) \sim \dfrac{\pi}{2}e^{-\pi t}$ donc $\varphi(t) = o(1/t^2)$ donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   φ est ainsi intégrable sur D :

$$\boxed{\text{l'intégrale } I \text{ existe.}}$$

4. $\forall t \in D \quad \varphi(t) = \dfrac{e^{-\pi t}}{1-e^{-\pi t}}\arctan t$.
   Puisque $e^{-\pi t} \in [0,1[$, $\quad \dfrac{e^{-\pi t}}{1-e^{-\pi t}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi t} \quad$ et $\quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi t}\arctan t$.
   Il s'agit d'une série de fonctions continues et positives sur D dont la somme φ est intégrable sur D. Donc (théorème de convergence monotone appliqué aux séries) chaque intégrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-k\pi t}\arctan t dt$ existe (ce qui est d'ailleurs immédiat), la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-k\pi t}\arctan t dt$ converge, et I en est la somme.
   En résumé, on peut intégrer terme à terme :

$$\boxed{I = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-k\pi t}\arctan t dt}$$

   Intégrons par parties :
$$\int_0^\infty e^{-k\pi t}\arctan t dt = \lim_{X\to\infty}\left(\left[\frac{e^{-k\pi t}}{-k\pi}\arctan t\right]_0^X + \frac{1}{k\pi}\int_0^X \frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}dt\right)$$
   Le crochet a pour limite 0 en $+\infty$ donc toutes les limites existent :
$$\int_0^\infty e^{-k\pi t}\arctan t dt = \frac{1}{k\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}dt.$$
   On conclut :

$$\boxed{I = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}dt}$$

II

5. Posons, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha(x,t) = \alpha_x(t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$.
   Pour tout x réel, $\alpha_x \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.
   Pour $x < 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha_x(t) = +\infty$ donc α_x est non intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x)$ n'est pas défini.
   Pour $x \geq 0$, $0 \leq \alpha_x(t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ donc α_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $f(x)$ est défini.

   $$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}_+}$$

   $\alpha \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $|\alpha(x,t)| \leq \beta(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ avec β continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$ indépendante de x.
   Dans ces conditions :

   $$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$$

   Enfin $0 \leq f(x) \leq \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}dt = 1/x$ donc :

   $$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = 0}$$

6. Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
   α admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-te^{-xt}}{1+t^2}$ et $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$ toutes deux continues, ainsi que α sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.
   Chacune d'elles satisfait sur $[a,b]$ à une hypothèse de domination par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$:
   $|\alpha(x,t)| \leq e^{-at}$, $|\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}(x,t)| \leq be^{-at}$ et $|\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}(x,t)| \leq b^2e^{-at}$ (par exemple).
   Le théorème de Leibniz s'applique :

   $$\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } f' \text{ et } f'' \text{ se calculent en dérivant sous l'intégrale.}}$$

   En particulier $f''(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt$ d'où :

   $$\boxed{f''(x) + f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}dt = 1/x.}$$

7. Par parties : $S(X) = \Big[-\dfrac{\cos t}{t}\Big]_a^X - \displaystyle\int_a^X \frac{\cos t}{t^2}dt$.
   D'une part, $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{\cos X}{X} = 0$.
   D'autre part, $t \longmapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ (continue et dominée par $1/t^2$).
   Donc :

   $$\boxed{\lim_{X\to\infty} S(X) \text{ existe. Il en est de même pour } \lim_{X\to\infty} C(X).}$$

8. L'équation homogène $y'' + y = 0$ admet (cos, sin) pour système fondamental de solutions.
   La méthode de variation des constantes donne les solutions de $y'' + y = 1/x$ sous la forme $A(x)\cos x + B(x)\sin x$ où A et B sont C^1 avec $A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0$ et $-A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 1/x$.
   Donc $A'(x) = -\dfrac{1}{x}\sin x$ et $B'(x) = \dfrac{1}{x}\cos x$, d'où $A(x) = g(x) + C$ et $B(x) = -h(x) + D$, C et D constantes réelles.

$$\boxed{\text{La solution générale de } y'' + y = 1/x \text{ est } x \longmapsto g(x)\cos x - h(x)\sin x + C\cos x + D\sin x, (C,D) \in \mathbb{R}^2.}$$

9. f est de la forme précédente et, de plus, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
   Or $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. cos et sin étant bornées, $\lim_{x\to\infty}(g(x)\cos x - h(x)\sin x) = 0$.
   Le couple (C, D) associé à f vérifie donc $\lim_{x\to\infty}(C\cos x + D\sin x) = 0$.
   Avec $x = 2n\pi$ puis $x = 2n\pi + \pi/2$, il vient $C = D = 0$.
   Donc $f(x) = g(x)\cos x - h(x)\sin x = \displaystyle\int_x^\infty \frac{\sin t\cos x - \cos t\sin x}{t}dt = \int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t}dt$.
   Les changements de variable affines $u \longmapsto t = u + x$ puis $v \longmapsto u = xv$ $(x > 0)$ donnent alors les expressions demandées :

$$\boxed{f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u+x}du = \int_0^\infty \frac{\sin(xv)}{1+v}dv.}$$

III

10. La question 4. a montré : $I = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\pi} f(k\pi)$.
    On vient de voir que $f(k\pi) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin u}{u+k\pi}du = \int_0^\infty \frac{\sin kv}{v+\pi}dv$ (par $v \longmapsto u = kv$).

$$\boxed{I = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ku}{u+\pi}du.}$$

11. i) Commençons par une intégration par parties :
    $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ku}{u+\pi}du = \lim_{X\to\infty}(\Big[-\frac{\cos ku}{k(\pi+u)}\Big]_0^X - \int_O^X \frac{\cos ku}{k(\pi+u)^2}du)$.
    Les limites existent pour des raisons déjà rencontrées :
    $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ku}{u+\pi}du = \frac{1}{k\pi} - \int_O^\infty \frac{\cos ku}{k(\pi+u)^2}du$
    donc $I = \displaystyle\sum_{k=1}^\infty (\frac{1}{k^2\pi^2} - \int_O^\infty \frac{\cos ku}{\pi k^2(\pi+u)^2}du)$.
    On sait que cette série converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2\pi^2}$ aussi. Donc on peut écrire :

$$\boxed{I = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \int_O^\infty \frac{\cos ku}{k^2(\pi+u)^2}du.}$$

    ii) Pour obtenir le résultat demandé, on utilise le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque pour la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\cos ku}{k^2(\pi+u)^2} = \sum_{k\geq 1}^\infty \varphi_k(u)$.
    Chaque fonction φ_k est continue sur $\mathbb{R}_+$, et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $|\varphi_k(u)| \leq \dfrac{1}{k^2(\pi+u)^2} = O(\dfrac{1}{u^2})$.
    La série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}^\infty \varphi_k(u)$ est convergente pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ car $|\varphi_k(u)| \leq 1/k^2\pi^2$ et cette majoration établit même la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$. Chaque fonction φ_k étant continue sur $\mathbb{R}_+$, il en est de même de la somme S de la série.
    Enfin $\displaystyle\int_0^\infty |\varphi_k(u)|du \leq \int_0^\infty \frac{du}{k^2(\pi+u)^2} = \frac{1}{k^2\pi}$, donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\int_0^\infty |\varphi_k(u)|du$ converge.
    Dans ces conditions, S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_0^\infty S(u)du = \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \varphi_k(u)du$.
    I devient donc :

$$\boxed{I = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi}\int_O^\infty \frac{1}{(\pi+u)^2}(\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos ku}{k^2})du.}$$

12. La définition de G est cohérente avec la 2π-périodicité requise car $G(2\pi) = \dfrac{\pi^2}{6} = G(0)$.
La restriction de G au segment $[0, 2\pi]$ est continue (car polynomiale), ce qui assure la continuité de G sur $\mathbb{R}$.
De plus, la restriction de G à chaque segment $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ est de classe C^1, donc G est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Ces propriétés assurent (théorème de convergence normale) que la série de Fourier de G est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et que G en est la somme.
Pour $x \in [0, 2\pi]$, $G(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{1}{4}x(2\pi - x)$, d'où $G(2\pi - x) = G(x)$ et par 2π-périodicité $G(-x) = G(x)$.
Les deux membres étant 2π-périodiques, cette égalité sur $[0, 2\pi]$ entraine l'égalité sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{G \text{ est paire.}}$$

Par suite, les coefficients $b_n(G)$ sont nuls.
$a_0(G) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi^3}{6}\right) = 0.$
Pour $n \geq 1$, $a_n(G) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}\right)\cos nx dx.$
Par parties : $a_n(G) = -\dfrac{2}{\pi n}\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\sin nx dx$ (le crochet est nul).
Par parties à nouveau : $a_n(G) = -\dfrac{2}{\pi n}\left[-\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \dfrac{2}{\pi n}\displaystyle\int_0^\pi -\frac{1}{2}\frac{\cos nx}{n}dx$.
Et finalement $a_n(G) = \dfrac{1}{n^2}$ (l'intégrale est nulle).
La série de Fourier de G est donc $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ (on constate bien, comme prévu, sa convergence normale).
On a déjà dit que G en est la somme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.}$$

13. On vient de justifier que $\forall x \in [0, 2\pi] \quad T(x) = G(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{\pi^2}{6}$.
En particulier, pour $x = 0$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

14. Par translation sur la variable et 2π-périodicité de G :
$a_k = \displaystyle\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{G(u)}{(\pi + u)^2}du = \int_0^{2\pi} \frac{G(u)}{(\pi + 2k\pi + u)^2}du.$
Par parties, puisque, sur $[0, 2\pi]$, $G'(u) = \dfrac{u - \pi}{2}$: $a_k = \left[-\dfrac{G(u)}{\pi + 2k\pi + u}\right]_0^{2\pi} + \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{u - \pi}{2(\pi + 2k\pi + u)}du.$
En écrivant $u - \pi = \pi + 2k\pi + u - (2\pi + 2k\pi)$:
$a_k = \dfrac{\pi}{6}\left(\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+3}\right) + \pi - \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2\pi + 2k\pi}{2(\pi + 2k\pi + u)}du.$
Et finalement :

$$\boxed{a_k = \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) + \pi - (k+1)\pi \ln\left(\frac{2k+3}{2k+1}\right).}$$

15. L'existence de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(\pi + u)^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^2}\right)du$ garantit la convergence de la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ et l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \int_0^\infty \frac{1}{(\pi + u)^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^2}\right)du.$$

Avec le calcul de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, l'expression de I obtenue au 11. se transforme donc en :

$I = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{6}(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}) + \pi - (k+1)\pi\ln(\frac{2k+3}{2k+1})\right)$.

Or $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}) = 1$ (série télescopique), donc :

$$\boxed{I = \sum_{k=0}^{\infty}(-1 + (k+1)\ln(\frac{2k+3}{2k+1})) \text{ et cette série converge comme } \sum_{k\geq 0} a_k.}$$

16. Soit donc $E_N = exp(I_N) = e^{-N}\prod\limits_{n=0}^{N-1}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} = e^{-N}\frac{\prod\limits_{n=1}^{N}(2n+1)^n}{\prod\limits_{n=0}^{N-1}(2n+1)^{n+1}}$.

En simplifiant : $E_N = e^{-N}\frac{(2N+1)^N}{\prod\limits_{n=0}^{N-1}(2n+1)}$.

Le dénominateur est $1.3.5...(2N-1) = \frac{(2N)!}{2.4...(2N)} = \frac{(2N)!}{2^N N!}$ donc $E_N = e^{-N}\frac{2^N N!(2N+1)^N}{(2N)!}$.

Avec la formule de Stirling : $N! \sim_\infty \sqrt{2\pi N}N^N e^{-N}$ et $(2N)! \sim_\infty \sqrt{4\pi N}(2N)^{2N}e^{-2N}$.

D'où $E_N \sim_\infty \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(2N+1)^N}{(2N)^N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1 + \frac{1}{2N}\big)^N$.

Comme $\lim\limits_{N\infty}\big(1 + \frac{1}{2N}\big)^{2N} = e$, on obtient $\lim\limits_{N\infty} E_N = \sqrt{\frac{e}{2}}$.

$I = \lim\limits_{N\infty} I_N = \lim\limits_{N\infty}\ln(E_N)$ donc :

$$\boxed{I = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)}$$

17. $\frac{1}{e^{2\pi t}-1} = \frac{1}{(e^{\pi t}-1)(e^{\pi t}+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\pi t}-1} - \frac{1}{e^{\pi t}+1}\right)$.

Dès lors, les intégrabilités étant acquises ; $J = \frac{1}{2}(I - K)$ donc $K = I - 2J$.

Avec la valeur fournie pour J :

$$\boxed{K = \frac{1}{2}(\ln\pi - 1)}$$