Corrigé de l'exercice 1 (source Concours marocain 2005)

1. $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} D(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(X+1) - (P+\lambda Q)(X) \\ &= (P(X+1) - P(X)) + \lambda(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= D(P) + \lambda D(Q) \end{aligned}$$
d'où D est linéaire.
D'autre part si P est un polynôme, il est clair que $D(P) = P(X+1) - P(X)$ est un polynôme, donc $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$.
Donc D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) $P \in \mathrm{Ker}(D) \implies P(X) = P(X+1)$, d'où les relations suivantes :
$$\begin{array}{l} P(0) = P(1) \\ \vdots \\ P(n-1) = P(n) \end{array},$$
en sommant ces inégalités on obtient $P(n) = P(0)$.

   (b) Si $P \in \mathrm{Ker}(D)$, alors $P(n) = P(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc le poynôme $Q(X) = P(X) - P(0)$, admet une infinité de racines, donc est nul. D'où $P(X) = P(0)$, donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$, d'où $\mathrm{Ker}(D) \subset \mathbb{R}_0[X]$, l'autre inclusion est évidente d'où l'égalité.

3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $\deg(P) = n$, posons $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, donc $D(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k D(X^k)$, or $\forall k \geq 1, D(X^k) = (X+1)^k - X^k = kX^{k-1} + \ldots + 1$, grâce à la formule du binôme de Newton, donc $\deg(D(X^k)) = k-1$, et $\mathrm{co}(D(X^k)) = k$, et donc $\deg(D(P)) = n-1$ et $\mathrm{co}(D(P)) = na_n$, où $a_n = co(P)$.

   (b) $D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'aprés la question précèdente, en particulier $D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D.

4. D_n est la restriction de D sur $\mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathrm{Ker}(D_n) = \mathrm{Ker}(D) \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X]$. la formule du rang s'écrit alors : $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(D_n) + dim(\mathrm{Im}(D_n)) = \dim(\mathbb{R}_0[X]) + dim(\mathrm{Im}(D_n)) = 1 + dim(\mathrm{Im}(D_n))$, d'où $\dim(\mathrm{Im}(D_n)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, or $\mathrm{Im}(D_n) = D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'où l'égalité.

5. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, posons $\deg(Q) = n-1$ avec $n \geq 1$, donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Im}(D_n)$, d'où $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que: $Q = D_n(P) = D(P)$, d'où D est surjective.

6. (a) $P \in F \cap \mathrm{Ker}(D) \implies P(0) = 0$ et P polynôme constante $\implies P = 0$, donc $F \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$.

D'autre part : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, on peut écrire $P(X) = \underbrace{a_0}_{\in \mathrm{Ker}(D)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k X^k}_{\in F}$

(b) Existence : Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, comme D est surjective, alors $\exists P_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $D(P_0) = Q$, posons $P(X) = P_0(X) - P_0(0)$, donc $P(0) = 0$ et $D(P) = D(P_0 - a) = D(P_0) - D(a) = D(P_0) = Q$ où $a = P_0(0)$.
Unicité : Supposons qu'il existe deux polynômes P_1, P_2 tel que: $D(P_1) = D(P_2) = Q$ et $P_1(0) = P_2(0) = 0$, donc $D(P_1 - P_2) = 0$ et $(P_1 - P_2)(0) = 0$, d'où $P_1 - P_2 \in F \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$, d'où $P_1 = P_2$.
$\deg(Q) = \deg(D(P)) = \deg(P) - 1$, d'où $\deg(P) = \deg(Q) + 1$.

Deuxième partie.

1. Simple récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en utulisant la question 6.b.
2. $\deg(P_0) = 0$, donc $\deg(P_1) = 1$, or $P_1(0) = 0$, d'où $P_1(X) = aX$, or $D(P_1) = P_0$, d'où $a(X+1) - aX = 1$, d'où $a = 1$, et par suite $P_1(X) = X$.
De même $\deg(P_1) = 1$, donc $\deg(P_2) = 2$, or $P_2(0) = 0$, d'où $P_2(X) = aX^2 + bX$, or $D(P_2) = P_1$, d'où $a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX = X$, d'où $2aX + a + b = 1$, donc $a = \frac{1}{2}, b = -a = -\frac{1}{2}$ et par suite $P_1(X) = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{X(X-1)}{2}$.
3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Le résultat est déja vrai pour $P_1(X) = X$.
Supposons $P_{n-1}(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{(n-1)!}$, et posons $P(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$, on a : $P(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}
D(P) &= P(X+1) - P(X) \\
&= \frac{(X+1)X\dots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!} \\
&= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{n!}(X+1-(X-n+1)) \\
&= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{(n-1)!} \\
&= P_{n-1}(X)
\end{aligned}$$

Or P_n est l'unique polynôme qui vérifie cette relation, donc $P_n(X) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.

4. Comme $\mathrm{Card}(P_0,\dots,P_n) = n+1 = \dim(R_n[X])$, pour montrer que c'est une base il suffit alors de montrer qu'elle est libre.
   En effet, on va raisonner par récurrence.
   Pour $n=1$, il est clair que $\{P_0(X)=1\}$ est libre.
   Supposons $(P_0,\dots,P_n)$ est libre et montrons que $(P_0,\dots,P_{n+1})$ l'est aussi.
   Pour cela on suppose qu'ils existent des nombres réels $(\lambda_i)_{0\le i\le n+1}$ tel que: $\lambda_0P_0 + \lambda_1P_1 + \dots + \lambda_{n+1}P_{n+1} = 0$, donc
   $$\begin{array}{ll} D(\lambda_0P_0 + \lambda_1P_1 + \dots + \lambda_{n+1}P_{n+1}) & = \lambda_0D(P_0) + \lambda_1D(P_1) + \dots + \lambda_{n+1}D(P_{n+1}) \\ & = \lambda_1P_0 + \dots + \lambda_{n+1}P_n \\ & = 0 \end{array},$$
   car $D(P_0)=0, D(P_k) = P_{k-1}, \quad \forall 1 \le k \le n+1$, or la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est libre, d'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$, et par suite $\lambda_0P_0 = \lambda_0 = 0$.

5. On rappelle d'abord que si on fait la division euclidienne par un polynôme de degré 1, on obtient une constante dans le reste.
   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $\deg(P) \le n$
   Faisons la division euclidienne de P, par X, on obtient $P(X) = XQ_0(X) + a_0$, avec $\deg(Q_0) = \deg(P) - 1 \le n-1$.
   Faisons aprés la division euclidienne de Q_0 par $\dfrac{X-1}{2}$, on obtient :
   $Q_0(X) = \dfrac{X-1}{2}Q_1(X) + a_1$ tel que: $\deg(Q_1) = \deg(Q_0) - 1 \le n-2$, en particulier :
   $$\begin{array}{ll} P(X) & = \dfrac{X(X-1)}{2}Q_1(X) + a_1X + a_0 \\ & = P_2(X)Q_1(X) + a_1P_1(X) + a_0P_0(X) \end{array}.$$
   Aprés on fera la division euclidienne de Q_1 par $\dfrac{X-2}{3}$, on obtient :
   $Q_1(X) = \dfrac{X-2}{2}Q_2(X) + a_2$ tel que: $\deg(Q_2) = \deg(Q_2) - 1 \le n-3$, en particulier : $P(X) = P_3(X)Q_2(X) + a_2P_2(X) + a_1P_1(X) + a_0P_0(X)$.
   Et ainsi de suite, jusqu'à avoir $\deg(Q_n) \le -1$, donc $Q_n = 0$ et par suite $P(X) = a_nP_n(X) + \dots + a_1P_1(X) + a_0P_0(X)$

6. $X^2 = X.X, X = \dfrac{X-1}{2} + \dfrac{1}{2}$, donc :

$X^2 = \dfrac{X(X-1)}{2} + \dfrac{1}{2}X = P_2(X) + \dfrac{1}{2}P_1(X)$.

$$X^3 = X.X^2,\ \ X^2 \ = 2X\frac{X-1}{2} + 1, X^3 \quad ,$$
$$= 2X\frac{X(X-1)}{2} + X$$
$$= 2XP_2(X) + P_1(X)$$

et enfin $2X = 6\dfrac{X-2}{3}+1$, d'où $X^3 \ = \left(6\dfrac{X-2}{3}+1\right)P_2(X) + P_1(X)$.
$$= 6P_3(X) + P_2(X) + P_1(X)$$

7. (a) Découle de la question 6.b) de la 1ère partie pour $Q(X) = X^n$.

   (b) $D(A_n) = X^n \implies A_n(X+1) - A_n(X) = X^n$, donc pour $0 \le k \le p$, on a : $A_n(k+1) - A_n(k) = k^n$, d'où $S_{n,p} \ = \sum_{k=0}^{p} k^n$
   $$= \sum_{k=0}^{p} A_n(k+1) - A_n(k)$$
   $$= A_n(p+1) - A_n(0)$$
   $$= A_n(p+1)$$

   (c) On a : $D\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k D(P_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = X^n$, d'autre part $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}(0) = 0$, car $P_{k+1}(0) = 0, \quad \forall 0 \le k \le n$, de plus $\deg\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}\right) = \deg(P_{n+1}) \le n+1$, or A_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ qui vérifie cette relation, donc $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1} = A_n$.

   (d) On a : $X^2 = P_2(X) + \dfrac{1}{2}P_1(X)$, d'où $A_2 = P_3(X) + \dfrac{1}{2}P_2(X)$.
   Et aussi, $X^3 = 6P_3(X) + P_2(X) + P_1(X)$, donc :
   $A_3 = 6P_4(X) + P_3(X) + P_2(X)$.

   (e) $S_{2,p} = A_2(p+1) = P_3(p+1) + \dfrac{1}{2}P_2(p+1)) = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{12}$.
   $S_{3,p} = 6P_4(p+1) + P_3(p+1) + P_2(p+1) = \dfrac{p(p+1)(3p^2-7p+10)}{12}$,
   aprés toute simplification en utilisant les relations : $P_2(X) = \dfrac{X(X-1)}{2}, P_3(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{6}, P_4(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{12}$.

Fin.