Université Paul Sabatier Novembre 2011

☯ M1 MEI Analyse – Feuille d'Exercices Semaine 10/11. ☯

**Exercice 1.** *(quelques calculs).*

(1) *(convolution de densités gaussiennes). Pour* $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ *on pose* $g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x_m)^2}{2\sigma^2})dx$. *Soient* $m_1, m_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0$, *montrer que le produit de convolution* $g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2}$ *est bien défini, que* $g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2} \in L^p(\mathbb{R})$ *pour tout* $p \in [1, +\infty]$. *Enfin montrer que* $g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2} = g_{m_1+m_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$. *Interprétation probabilistique ?*

(2) *Pour* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *existe-t-il un résultat du cours assurant l'existence du produit de convolution* $(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{\alpha x}) \star (\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{\beta x})$ *; justifier son existence et le calculer.*

**Exercice 2.** *Soit* $f_x(t) := t^{x-1}e^{-t}$. *Montrer que pour tout* $x > 0$ *la fonction*$f_x$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+^\star$. *On définit alors la fonction Gamma par*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty f_x(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(1) *Montrer que* $f_x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star)$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *:* $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \big(\log(t)\big)^k t^{x-1}e^{-t}dt$.

(2) *Soient* $\alpha > 0,\ \beta > 0$. *Montrer que* $f_\alpha \star f_\beta$ *est bien définie et* $f_\alpha \star f_\beta \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

(3) *En calculant l'intégrale de* $f_\alpha \star f_\beta$ *montrer que*

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt = \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}}du.$$

**Exercice 3.** *En utilisant la convolution par* $\mathbf{1}_{[0,1]}$ *montrer qu'il n'existe pas d'élément neutre pour la convolution dans* $L^1(\mathbb{R})$. *(i.e. il n'existe pas de fonction* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *vérifiant pour tout* $g \in L^1(\mathbb{R})$ *:* $f \star g = g$ *presque partout.* $(L^1(\mathbb{R}), \star)$ *est donc une algèbre de Banach non unitaire.*

**Exercice 4.** *Soient* $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ *telles que* $f', g' \in L^\infty(\mathbb{R})$ *; si* $f$ *et* $g'$ *sont dans* $L^1(\mathbb{R})$*, montrer que* $f \star g$ *est bien définie et* $f \star g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$*.*

**Exercice 5.** *(le théorème de Weierstarss). Pour* $n \in \mathbb{N}^\star$ *on pose*

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt, \qquad p_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{a_n} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

(1) *Si* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *est nulle en dehors de* $[-1/2, 1/2]$*, montrer que* $f \star p_n$ *est un polynôme sur* $[-1/2, 1/2]$*.*

(2) *En déduire le théorème de Weierstrass.*

21 novembre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr