Université Paul Sabatier **Octobre 2011**

☢ M1 MEI Analyse – Feuille d'Exercices Semaine 7/8. ☯

Exercice 1. *Soit pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, $x \in [0,1]$: $g_n(x) = \sin(nx)$ *Montrer que la suite* $(g_n)_n$ *n'admet aucune sous-suite simplement convergente vers* 0 *sur* $[0,1]$.

Exercice 2. *Calculer la somme de la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(1) *En remarquant que* $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}dt$.

(2) *A l'aide de la fonction* $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercice 3. (1) *Montrer que pour tout* $x > 0$ *on a* $e^{-x^2/2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \leq \int_x^\infty e^{-t^2/2}dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x}$. *En déduire un équivalent en* $+\infty$ *de* $\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt$.

(2) *Etude et équivalents en aux bornes du domaine de* $f(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt$.

Exercice 4. *Convergence et montrer que de* $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}dx = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^3}$.

Exercice 5. *Convergence et calcul de* $\int_0^\infty \frac{\log(t)}{1-t^2}dt$.

Exercice 6. *Domaine de définition, puis calcul de* $F(x) = \int_0^\infty \frac{arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

Exercice 7. *Montrer que* $\int_0^\infty \frac{x}{ch(x)}dx = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 8. *Soient* $p, q \in \mathbb{R}_+^\star$, *montrer que* $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{nq+p}$.

Exercice 9. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \int_1^\infty e^{-t^n}dt$. *Après avoir justifié la définition de* a_n, *montrer que la suite* a_n *converge, préciser sa limite et donner un équivalent de* a_n.

Exercice 10. *Soit* $f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2xt)dt$. *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe une suite* $(a_n)_n$ *de réels telle que* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. *Montrer que :* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^n}=\int_0^1 x^x dx,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=\int_0^1 x^{-x}dx,$.

Exercice 12. *Etudier sur son domaine de définition la fonction définie par* $f(x)=\int_{\mathbb{R}_+}e^{-tx}\log(t)dt$. *Trouver une équation différentielle vérifiée par* f. *En déduire la forme explicite de* f.

Exercice 13. *On pose pour* $n\in\mathbb{N}^\star$: $a_n=\int_0^\infty\frac{\log(t)e^{-nt}}{\sqrt{t}}dt$.

(1) *Justifier la convergence des intégrales impropres.*
(2) *Par convergence dominée déterminer* $\lim_{n\to+\infty}a_n=l$.
(3) *Montrer que* $a_n-l=-\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\pi}+\frac{J}{\sqrt{n}}$ *où* J *sera donné sous la forme d'une intégrale.*

Exercice 14. *On pose pour* $n\in\mathbb{N}^\star$: $a_n=\int_0^\infty\frac{x^n}{1+x^n}dx$.

(1) *Déterminer la limite* l *de la suite* $(a_n)_n$.
(2) *Déterminer un équivalent de* a_n-l.
(3) *Montrer que* $u_n=l+\frac{a}{n}+\frac{J}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *où l'on exprimera* J *sous forme d'une intégrale.*

24 octobre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr