Université Paul Sabatier **Novembre 2011**

◕ M1 MEI Analyse – Feuille d'Exercices Semaine 11/12. ◕

Exercice 1. *Montrer que la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $f(t) = e^t \sin(\exp(e^t))\,[\exp(e^t)]^{1-\alpha}$ *(avec* $0 < \alpha < 1$*) admet une abscisse de convergence simple égale à* $-\infty$ *mais une abscisse de convergence absolue égale à* $+\infty$*.*

Exercice 2. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* $\frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}$ *et en déduire à l'aide de la transformée de Laplace les solutions de l'équation différentielle* $y''(x) - 5y'(x)/2 + y(x) = -5\sin(x)/2$ *aux conditions initiales* $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$*.*

Exercice 3.
(1) *Calculer la transformée de Laplace de* $f(x) = x\sin(\omega x)$ *(où* $\omega \in \mathbb{R}$*) (commencer par calculer* f''*).*
(2) *En déduire une fonction* g *vérifiant* $\mathscr{L}(g)(s) = \frac{s}{(s+2)^2}$*.*
(3) *Retrouver ce dernier résultat par un calcul direct.*

Exercice 4.
(1) *Résoudre le système différentiel* $\begin{cases} y'' + (z' - y') &= -3y/4 \\ z'' - (z' - y') &= -3z/4. \end{cases}$ *avec les conditions initiales* $y(0) = z(0) = 0$ *et* $y'(0) = -z'(0) = 1$*.*
(2) *Résoudre le système différentiel* $\begin{cases} y_1'(x) + 2y_2'(x) + 3y_3'(x) &= 0 \\ y_1'(x) - y_2'(x) &= 3x - 3 \\ y_2'(x) + 2y_3'(x) &= 1 - x^2. \end{cases}$ *avec les conditions initiales* $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$*.*

Exercice 5.
(1) *Soient* $f, g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nulles sur* $\mathbb{R}_-$*. Montrer que* $f \star g$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}$ *et nulle sur* $\mathbb{R}_-$*.*
(2) *Calculer la transformée de Laplace de* $t \mapsto tY(t)$*.*
(3) *Résoudre l'équation* $f(x) = x + \int_0^x (x-t)f(t)dt$ $(x \in \mathbb{R}_+)$*, d'inconnue* $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nulle sur* $\mathbb{R}_-$*.*

Exercice 6. *Dans le même esprit que l'exercice précédent, déterminer à l'aide de la transformée de Laplace (si c'est possible) les solutions* $f\ :\ \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ *des équations de Volterra :*
(1) $\int_0^x f(t)e^{x-t}dt = \sin(x)$*.*
(2) $f(x) + \int_0^x f(x-t)e^{-t}dt = \cos(x)$*.*
(3) $f(x) + \int_0^x f(x-t)f(t)dt = 2(2x+1)e^{2x}$*.*

Exercice 7.
(1) *Déterminer l'abscisse de convergence de* $f(t) = Y(t)\cos(\sqrt{t})/\sqrt{t}$*.*
(2) *En écrivant* f *sous la forme d'une série, montrer que pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *de partie réelle* > 0 *on a* $\mathscr{L}(f)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\exp(-1/4s)$*.*

Exercice 8. *Montrer que* $\mathscr{L}(1-\cos(t))(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$*. En déduire que* $\mathscr{L}\left(e^t\left[e^{-t}(1-\cos(t))\right]''\right)(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x^2+1)}$*.*

Exercice 9. *On se propose de trouver un original* f *de la fonction* $F(x) = e^{-\sqrt{x}}$ *(où* $\sqrt{x}$ *est le prolongement complexe de la racine carrée réelle).*
(1) *Montrer que* $4xF''(x) + 2F'(x) - F(x) = 0$*.*
(2) *En déduire que* $4t^2 f'(t) + (6t-1)f(t) = 0$ *et conclure.*

1. Petit bestiaire de formules

Fonction : $f(t)$	Transformée : $\mathcal{L}(f)(x)$	Fonction : $f(t)$	Transformée : $\mathcal{L}(f)(x)$
1	$\frac{1}{x}$	e^{at}	$\frac{1}{x-a}$
t^n	$\frac{n!}{x^{n+1}}$	$t^\alpha, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}$
$e^{kt}\sin at$	$\frac{a}{(x-k)^2+a^2}$	$e^{kt}\cos at$	$\frac{x-k}{(x-k)^2+a^2}$
$e^{kt}\sinh at$	$\frac{a}{(x-k)^2-a^2}$	$e^{kt}\cosh at$	$\frac{x-k}{(x-k)^2-a^2}$
$t\sin at$	$\frac{2ax}{(x^2+a^2)^2}$	$t\cos at$	$\frac{x^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}$
$te^{\alpha t}$	$\frac{1}{(x+\alpha)^2}$	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$
$\log t$	$\frac{\Gamma'(1)-\log x}{x}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$	$\log\frac{x+b}{x+a}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[\mathcal{L}(f)\right](x)$	$tf'(t)$	$-\mathcal{L}(f)(x)-x\frac{d}{dx}\left[\mathcal{L}(f)\right](x)$
$f'(t)$	$x\mathcal{L}(f)(x)-f(0)$	$f''(t)$	$x^2\mathcal{L}(f)(x)-xf(0)-f'(0)$
$f(t-\alpha), \alpha>0$	$e^{-\alpha x}\mathcal{L}(f)(x)$	$f^{(n)}(t)$	$x^n\mathcal{L}(f)(x)-\sum_{k=0}^{n-1}x^{n-1-k}f^{(k)}(0)$
$e^{kt}f(t)$	$\mathcal{L}(f)(x-k)$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_x^{+\infty}\mathcal{L}(f)(v)dv$
$(f*g)(t)$	$\mathcal{L}(f)(x)\mathcal{L}(g)(x)$	$\int_0^t f(v)dv$	$\frac{\mathcal{L}(f)(x)}{x}$
$f(kt), k>0$	$\frac{1}{k}\mathcal{L}(f)\left(\frac{x}{k}\right)$	$f(t+\omega), \omega>0$	$\frac{1}{1-e^{\omega x}}\int_0^\omega e^{-xv}f(v)dv$

12 décembre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr