Université Paul Sabatier. (06-01-2012) Master MEI

☯ ☢ ☯ MEIS7M2 – EXAMEN FINAL . ☯ ☢ ☯

Durée trois heures, pas de documents, téléphone, calculatrices.
Le barème est approximatif.

Exercice 1. ***(environ 6 points).*** *Soient $1 \leq \alpha \leq \beta < +\infty$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.*

(1) *Montrer que : $t^p \leq \max\{t^\alpha, t^\beta\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $p \in [\alpha, \beta]$.*
(2) *Montrer que $|f(x)|^p \leq |f(x)|^\alpha + |f(x)|^\beta$ pour tout $\alpha \leq p \leq \beta$ et tout $x \in \mathbb{R}$.*
(3) *Si $f \in L^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^\beta(\mathbb{R})$, montrer que $f \in L^p(\mathbb{R})$, pour tout $\alpha \leq p \leq \beta$.*
(4) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $I_f := \{1 \leq p \leq +\infty : f \in L^p(\mathbb{R})\}$ est toujours un intervalle.*
(5) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et telle que $I_f \neq \emptyset$. Par convergence dominée, montrer que $p \mapsto \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$ est continue sur I_f.*

Exercice 2. ***(environ 14 points).*** *On pose pour tout $x > 0$: $\boldsymbol{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ et on rappelle que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.*

(1) *On pose pour $t > 0$: $f(t) = 1/\sqrt{t}$.*
   (a) *Déterminer les abscisses de convergence simple $\zeta_c(f)$ et absolue $\zeta_a(f)$ de f.*
   (b) *Pour tout $x > \zeta_a(f)$, calculer $\mathscr{L}(f)(x)$.*
   (c) *Montrer que $\mathscr{L}(t \mapsto 1/\sqrt{t\pi})(x) = 1/\sqrt{x}$.*
(2) *A l'aide du produit de convolution, montrer que pour tout $x > 1$:*
$$\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}} = \mathscr{L}([e^t] \star [1/\sqrt{t\pi}])(x)$$
(3) *En déduire que pour tout $x > 1$*
$$\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}} = \mathscr{L}(t \mapsto e^t \cdot \boldsymbol{erf}(\sqrt{t}))(x).$$
(4) *On se propose dans cette partie de déterminer la transformée de Laplace de la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}_+^\star$ par : $\varphi(t) = t^{-3/2} e^{-k^2/4t}$ où $k \in \mathbb{R}^\star$ est une constante non nulle.*
   (a) *Montrer que $\zeta_c(\varphi) = \zeta_a(\varphi) = 0$.*
   (b) *Par le changement de variable $v = \frac{k}{2\sqrt{t}}$, montrer que pour tout $x > 0$:*
$$\mathscr{L}(\varphi)(x) = \frac{4}{k} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \cdot e^{-xk^2/4v^2} dv.$$

Tournez la page S.V.P.

(c) *Puis en posant* $a = k\sqrt{x}/2$:

$$\mathscr{L}(\varphi)(x) = \frac{4e^{-k\sqrt{x}}}{k}\int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{k\sqrt{x}}{2v}\right)^2}dv = \frac{4e^{-k\sqrt{x}}}{k}\int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{a}{v}\right)^2}dv.$$

(d) *A l'aide du changement de variable* $u = a/v$ *dans l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{a}{v}\right)^2}dv$ *montrer que*

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{a}{u^2}\right)e^{-\left(u-\frac{a}{u}\right)^2}du = 2\int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{a}{v}\right)^2}dv.$$

(e) *Montrer que que pour tout* $a \in \mathbb{R}$: $\int_0^{+\infty} e^{-\left(t-\frac{a}{t}\right)^2}dt = \sqrt{\pi}/2.$

(f) *En déduire que* $\mathscr{L}(\varphi)(x) = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{k}e^{-k\sqrt{x}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star.$

Fin de l'épreuve.

	Fonction : $f(t)$	Transformée : $\mathcal{L}(f)(x)$	Fonction : $f(t)$	Transformée : $\mathcal{L}(f)(x)$
	1	$\frac{1}{x}$	e^{at}	$\frac{1}{x-a}$
	t^n	$\frac{n!}{x^{n+1}}$	$t^\alpha, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}$
	$e^{kt}\sin at$	$\frac{a}{(x-k)^2+a^2}$	$e^{kt}\cos at$	$\frac{x-k}{(x-k)^2+a^2}$
	$e^{kt}\sinh at$	$\frac{a}{(x-k)^2-a^2}$	$e^{kt}\cosh at$	$\frac{x-k}{(x-k)^2-a^2}$
	$t\sin at$	$\frac{2ax}{(x^2+a^2)^2}$	$t\cos at$	$\frac{x^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}$
	$te^{\alpha t}$	$\frac{1}{(x-\alpha)^2}$	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(x-\alpha)^{n+1}}$
	$\log t$	$\frac{\Gamma'(1)-\log x}{x}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$	$\log\frac{x+b}{x+a}$
	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[\mathcal{L}(f)\right](x)$	$tf'(t)$	$-\mathcal{L}(f)(x) - x\frac{d}{dx}\left[\mathcal{L}(f)\right](x)$
	$f'(t)$	$x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$	$f''(t)$	$x^2\mathcal{L}(f)(x) - xf(0) - f'(0)$
	$f(t-\alpha), \alpha > 0$	$e^{-\alpha x}\mathcal{L}(f)(x)$	$f^{(n)}(t)$	$x^n\mathcal{L}(f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}f^{(k)}(0)$
	$e^{kt}f(t)$	$\mathcal{L}(f)(x-k)$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_x^{+\infty}\mathcal{L}(f)(v)dv$
	$(f*g)(t)$	$\mathcal{L}(f)(x)\mathcal{L}(g)(x)$	$\int_0^t f(v)dv$	$\frac{\mathcal{L}(f)(x)}{x}$
	$f(kt), k > 0$	$\frac{1}{k}\mathcal{L}(f)\left(\frac{x}{k}\right)$	$f(t+\omega), \omega > 0$	$\frac{1}{1-e^{\omega x}}\int_0^{\omega} e^{-xv}f(v)dv$

Corrigé

Exercice 3. *Soient $1 \leq \alpha \leq \beta < +\infty$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.*

(1) *On suppose que $f \in L^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^\beta(\mathbb{R})$. Montrer que $|f|^p \leq |f|^\alpha + |f|^\beta$ pour tout $\alpha \leq p \leq \beta$ (Indic : vous pouvez pour $x \in \mathbb{R}$ distinguer les cas $|f(x)| < 1$ et $|f(x)| \geq 1$).*

(2) *Si $f \in L^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^\beta(\mathbb{R})$, montrer que $f \in L^p(\mathbb{R})$, pour tout $\alpha \leq p \leq \beta$.*

(3) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $I_f := \{1 \leq p \leq +\infty : f \in L^p(\mathbb{R})\}$ est toujours un intervalle.*

(4) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et telle que $I_f \neq \emptyset$. Par convergence dominée, montrer que $p \mapsto \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$ est continue sur I_f.*

Solution :

(1) Soit $f \in L^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^\beta(\mathbb{R})$. Si $x \in \mathbb{R}$, alors, ou bien $|f(x)| \leq 1$ et $|f(x)|^p \leq |f(x)|^\alpha$ ou bien $|f(x)| \geq 1$ et dans ce cas $|f(x)|^p \leq |f(x)|^\beta$. Par conséquent on a bien $|f(x)|^p \leq |f(x)|^\alpha + |f(x)|^\beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) On vient de voir que $f \in L^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^\beta(\mathbb{R})$ et $p \in [\alpha, \beta]$ impliquent $|f(x)|^p \leq |f(x)|^\alpha + |f(x)|^\beta \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par comparaison, $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [\alpha, \beta]$.

(3) On vient de montrer que $\alpha, \beta \in I_f$ implique $[\alpha, \beta] \subset I_f$. I_f est donc une partie convexe de $\mathbb{R}$ donc (cours) un intervalle.

(4) Il est suffisant de montrer que $I_f \ni p \mapsto \|f\|_p^p$ est continue. Pour cela on pose $F(x,p) = |f(x)|^p$. Pour tout $p \in I_f$, $F(\cdot, p)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $F(x, \cdot)$ est continue sur I_f pour tout $x \in \mathbb{R}$. En outre, avec (1), on a la domination $|F(x,p)| \leq \varphi(x) = |f(x)|^\alpha + |f(x)|^\beta \in L^1(\mathbb{R})$. On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée pour affirmer que $p \mapsto \|f\|_p^p$ est continue sur I_f. CQFD. ■

Exercice 4. ***(environ 14 points).*** *On pose pour tout $x > 0$: $\mathbf{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ et on rappelle que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.*

(1) *On pose pour $t > 0$: $f(t) = 1/\sqrt{t}$.*

   (a) *Déterminer les abscisses de convergence simple $\zeta_c(f)$ et absolue $\zeta_a(f)$ de f.*

   (b) *Pour tout $x > \zeta_a(f)$, calculer $\mathscr{L}(f)(x)$.*

   (c) *Montrer que $\mathscr{L}(t \mapsto 1/\sqrt{t\pi})(x) = 1/\sqrt{x}$.*

(2) *A l'aide du produit de convolution, montrer que pour tout $x > 1$:*

$$\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}} = \mathscr{L}([e^t] \star [1/\sqrt{t\pi}])(x)$$

(3) *En déduire que pour tout $x > 1$*

$$\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}} = \mathscr{L}(t \mapsto e^t \cdot \mathbf{erf}(\sqrt{t}))(x).$$

(4) *On se propose dans cette partie de déterminer la transformée de Laplace de la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}_+^\star$ par : $\varphi(t) = t^{-3/2} e^{-k^2/4t}$ où $k \in \mathbb{R}^\star$ est une constante non nulle.*

   (a) *Montrer que $\zeta_c(\varphi) = \zeta_a(\varphi) = 0$.*

(b) *Par le changement de variable* $v = \frac{k}{2\sqrt{t}}$, *montrer que pour tout* $x > 0$ *:*

$$\mathscr{L}(\varphi)(x) = \frac{4}{k}\int_0^{+\infty} e^{-v^2}\cdot e^{-xk^2/4v^2}dv.$$

(c) *Puis en posant* $a = k\sqrt{x}/2$ *:*

$$\mathscr{L}(\varphi)(x) = \frac{4e^{-k\sqrt{x}}}{k}\int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{k\sqrt{x}}{2v}\right)^2}dv = \frac{4e^{-k\sqrt{x}}}{k}\int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{a}{v}\right)^2}dv.$$

(d) *A l'aide du changement de variable* $u = a/v$ *dans l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{a}{v}\right)^2}dv$ *montrer que*

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{a}{u^2}\right)e^{-\left(u-\frac{a}{u}\right)^2}du = 2\int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{a}{v}\right)^2}dv.$$

(e) *Montrer que que pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *:* $\int_0^{+\infty} e^{-\left(t-\frac{a}{t}\right)^2}dt = \sqrt{\pi}/2$.

(f) *En déduire que* $\mathscr{L}(\varphi)(x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{k}e^{-k\sqrt{x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Solution :

(1) (a) L'intégrale impropre $\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt$ diverge pour $x = 0$; pour $x > 0$, $e^{-xt}/\sqrt{t} \underset{0_+}{\sim} 1/\sqrt{t}$ et $e^{-xt}/\sqrt{t} = o(t^{-2})$ en $+\infty$: l'intégrale est bien absolument convergente. Donc $\zeta_c(f) = \zeta_a(f) = 0$.

(b) Soit $x > 0$, comme $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2$

$$\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \underset{u=\sqrt{xt}}{=} 2\int_0^\infty e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

(c) On a donc pour tout $x > 0$: $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\mathscr{L}(t\mapsto 1/\sqrt{t})(x)}{\sqrt{\pi}} = \mathscr{L}(t \mapsto 1/\sqrt{t\pi})(x)$ par linéarité de la transformée de Laplace.

(2) Soit $x > 1$ vu de qui précède, on a

$$\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}} = \mathscr{L}(t\mapsto e^t)(x)\cdot\mathscr{L}(t\mapsto 1/\sqrt{t\pi})(x) = \mathscr{L}([e^t]\star[1/\sqrt{t\pi}])(x)$$

(3) Il s'agit donc de montrer que $\mathscr{L}([e^t]\star[1/\sqrt{t\pi}])(x) = \mathscr{L}(t\mapsto e^t\cdot \mathtt{erf}(\sqrt{t}))(x)$. Par le théorème d'unicité (cours) il est équivalent de montrer que pour tout $u > 0$: $[e^t]\star[1/\sqrt{t\pi}](u) = e^u\cdot\mathtt{erf}(\sqrt{u})$. Or, toutes ces fonctions étant bien entendu (par convention) nulles sur $\mathbb{R}_-$ le produit de convolution s'écrit (cours) :

$$\begin{aligned} e^t\star[1/\sqrt{t\pi}](u) &= \int_0^u e^{u-t}\frac{dt}{\sqrt{t\pi}} = e^u\int_0^u\frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t\pi}} \\ &\underset{v=\sqrt{t}}{=} e^u\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{u}} e^{-v^2}dv = e^u\cdot\mathtt{erf}(\sqrt{u}). \end{aligned}$$

(4) (a) $\zeta_c(f) = \zeta_a(f) = 0$, la preuve est identique à celle pour $f(t) = 1/\sqrt{t}$ donnée en (1-a) en observant bien que la convergence à l'origine pour $x > 0$ est donnée cette fois par le terme en exponentielle...

(b) Le changement de variable $v = \frac{k}{2\sqrt{t}}$ donne immédiatement $\mathscr{L}(\varphi)(x) = \frac{4}{k}\int_0^{+\infty} e^{-v^2}\cdot e^{-xk^2/4v^2}dv$.

(c) Puis en posant $a = k\sqrt{x}/2$ comme $-v^2 - \frac{xk^2}{4v^2} = -\left(v - \frac{k\sqrt{x}}{2v}\right)^2 - k\sqrt{x} = -\left(v - \frac{a}{v}\right)^2 - k\sqrt{x}$, on a :

$$\mathscr{L}(\varphi)(x) = \frac{4}{k}\int_0^{+\infty} e^{-v^2} \cdot e^{-xk^2/4v^2} dv = \frac{4e^{-k\sqrt{x}}}{k}\int_0^{+\infty} e^{-\left(v - \frac{k\sqrt{x}}{2v}\right)^2} dv = \frac{4e^{-k\sqrt{x}}}{k}\int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{a}{v}\right)^2} dv$$

(d) La formule

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{u^2}\right) e^{-\left(u-\frac{a}{u}\right)^2} du = 2\int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{a}{v}\right)^2} dv$$

à démontrer équivaut à

$$\int_0^{+\infty} \frac{a}{u^2} \cdot e^{-\left(u-\frac{a}{u}\right)^2} du = \int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{a}{v}\right)^2} dv.$$

Et dans cette dernière, on passe du terme de gauche à celui de droite par le changement de variable $v = a/u$.

(e) A l'aide du changement de variable $t = v - \frac{a}{v}$, on a pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\int_0^{+\infty} e^{-\left(v-\frac{a}{v}\right)^2} dv = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.

(f) Des questions (4-c) et (4-e) on tire immédiatement $\mathscr{L}(\varphi)(x) = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{k} e^{-k\sqrt{x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star$. $\blacksquare$