Université Paul Sabatier **Jeudi 21 juin 2012**

MEI M1 – Préparation à l'écrit – Seconde session.

Exercice 1. *Dans ce problème, $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré $\leq n$.*

On considère l'application $D : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \to P(X+1) - P(X) \end{array}$.

(1) (a) *Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.*

(b) (i) *Montrer que si $P \in \operatorname{Ker}(D)$ alors, pour tout entier $n \geq 0$, $P(n) = P(0)$.*

(ii) *Montrer alors que $\operatorname{Ker}(D) = \mathbb{R}_0[X]$.*

(c) (i) *Si P n'est pas un polynôme constant, préciser le degré de $D(P)$ en fonction de celui de P, ainsi que le coefficient dominant de $D(P)$ en fonction de celui de P.*

(ii) *En déduire que $D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, si $n \geq 1$, et que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D.*

(d) *Soit n un entier ≥ 1 ; on note D_n l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\operatorname{Ker}(D_n)$ et montrer que $Im(D_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.*

(e) *Montrer que l'endomorphisme D est surjectif.*

(f) (i) *On considère $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \operatorname{Ker}(D)$.*

(ii) *Conclure que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et que $D(P) = Q$; préciser le degré de P en fonction de celui de Q.*

(2) (a) *Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, $P_n(0) = 0$ et $P_{n-1} = D(P_n)$.*

(b) *Expliciter P_1 et P_2.*

(c) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $P_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.*

(d) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*

(e) *Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer que l'on obtient les coordonnées de P dans la base $(P_0, \cdots, P_n)$ par une succession de divisions euclidiennes.*

(f) *Expliciter alors les monômes X^2 et X^3 comme combinaisons linéaires de $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$.*

(3) ***Application***

(a) *Pour tout couple d'entiers (n, p) d'entiers positifs non nuls, on pose $S_{n,p} = 1^n + 2^n + \cdots + p^n$.*

(b) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme $A_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $A_n(0) = 0$ et $D(A_n) = X^n$.*

(c) *En revenant à la définition de D, montrer que $S_{n,p} = A_n(p+1)$.*

(d) *Si $X^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$, justifier que $A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}$.*

(e) *Déterminer les valeurs de A_2 et A_3.*

(f) *Donner, alors, sous forme factorisée, les valeurs de $S_{2,p}$ et $S_{3,p}$.*

Tournez la page s.v.p.

Exercice 2. *L'objet de ce problème est principalement l'étude et le calcul de l'intégrale* $I = \int_0^\infty \frac{arctan(t)}{e^{\pi t}-1}dt$. *On posera* $\varphi(t) = \frac{arctan(t)}{e^{\pi t}-1}$.

(1) (a) *Déterminer un éventuel prolongement par continuité de la fonction* φ *en* 0.

(b) *Etudier les variations de* φ *sur* $D =]0, +\infty[$ *(il peut être intéressant d'introduire la fonction auxiliaire* $\psi(t) = \frac{1-e^{-\pi t}}{1+t^2} - \pi arctan(t)$*). En déduire la borne supérieure de* φ *sur* D.

(c) *Justifier la convergence de l'intégrale impropre* $I = \int_0^\infty \frac{arctan(t)}{e^{\pi t}-1}dt$.

(d) *Démontrer les deux relations :*

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-k\pi t} arctan(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}dt.$$

(2) (a) *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction* $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$. *Préciser le domaine de continuité de* f *et déterminer la limite de* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) *Préciser le domaine où* f *est deux fois dérivable et établir une relation simple entre* f *et* f'' *sur* $D =]0, +\infty[$.

(c) *Etablir la convergence des intégrales impropres* $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ *et* $\int_a^\infty \frac{\cos(t)}{t}dt$, $(a > 0)$.

(d) *Résoudre l'équation différentielle vérifiée par* f *dans* $D =]0, +\infty[$ *et exprimer la solution générale à l'aide des deux fonctions* $g(x) = \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ *et* $h(x) = \int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t}dt$, $x > 0$.

(e) *En déduire que* $f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u+x}du = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{1+t}dt$, *pour tout* $x > 0$.

(3) (a) *Avec ce qui précède, montrer que* $I = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(ku)}{\pi+u}du$

(b) *Démontrer que :*

$$I = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(u+\pi)^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nu)}{n^2} \right) du$$

(c) *Soit* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction* 2π*-périodique égale à* $\frac{x^2}{4} - \frac{x\pi}{2} + \frac{\pi^2}{6}$ *sur* $[0, 2\pi]$.

(d) *Etudier la parité de* G, *déterminer le développement en série de Fourier réel de* G *en précisant son éventuelle convergence et la nature de cette convergence.*

(e) *En déduire la somme de la série* $T(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(nx)}{n^2}$ *lorsque* $x \in [0, 2\pi]$ *ainsi que la valeur de la somme* $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

(4) *On pose* $a_k = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{1}{(u+\pi)^2} \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(nu)}{n^2} \right) du$.

(a) *Calculer pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *la valeur de* a_k.

(b) *Montrer que* $I = \lim_{N\to\infty} I_N$ *où* $I_N = \sum_{k=0}^{N-1} \left(-1 + (n+1)\log\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\right)$.

(c) *En déduire que* I *est la somme d'une série convergente.*

(d) *Ecrire* $\exp(I_N)$ *sous la forme d'un produit de facteurs et en déduire la valeur de* I.

Fin de l'épreuve