M1 MEI DSL3 du 2/04/2012

Problème 1

UTILISATION DES POLYNOMES DE TCHEBYCHEV EN ANALYSE

Notations :

On note E l'espace vectoriel des applications continues de [-1,1] dans $\mathbb{R}$.
On désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de [-1,1] dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel.
On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynomiale.
Si f est un élément de E, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

Les parties II., III. sont indépendantes et utilisent les résultats de la partie I.

I. Polynômes de Tchebychev

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel.

1. Existence et unicité
   a) Déterminer un polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété (*):
   $$(*) : \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
   (on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$).
   b) Montrer qu'un polynôme vérifiant (*) est unique.
   On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n, on le note T_n.

On définit alors une fonction polynomiale sur [-1,1] par :
$\forall x \in [-1,1], \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Tournez la page S.V.P.

2. a) Montrer que $\forall x \in [-1, 1],\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$
   (on pourra calculer $T_{n+2}(x) + T_n(x)$).
   b) Calculer T_0, T_1, T_2, T_3.
   c) Donner le coefficient du terme de plus haut degré de T_n.

3. Racines et extrema
   a) Montrer que $\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x - \cos\theta_k)$ où $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.
   b) On pose pour k dans $\{0, 1,\ldots,n\}$, $c_k = \cos(\dfrac{k\pi}{n})$.
   Calculer $\|T_n\|_\infty$ puis montrer que :
   $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\},\ |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty$ et que : $\forall k \in \{0,1,\ldots,n-1\},\ T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$.
   Les $n+1$ réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont appelés points de Tchebychev.
   c) Dessiner le graphe de T_3, préciser sur le graphe les réels c_0, c_1, c_2, c_3. tableau de variation de T_3

II. Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

Orthogonalité des T_n

4. Montrer que pour toute fonction h de E, l'application $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur]-1,1[.

c.a.d, montrer que $\int_{-1}^{1} \frac{h(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$ existe.

Pour f et g éléments de E, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

5. a) Soit h une fonction positive de E, montrer que si $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0$ alors h est la fonction nulle.
   b) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

Ceci nous permet de définir une norme euclidienne sur E : pour tout élément h de E, on pose
$\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h\rangle}$.

6. Calculer $\langle T_n, T_m\rangle$ selon les valeurs des entiers naturels m et n. En déduire pour tout entier naturel n que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale (pour $\langle\ ,\ \rangle$) de E_n.

Polynôme de meilleure approximation quadratique

Dans toute la suite de la partie II., f désignera un élément de E et n un entier naturel.

On pose $d_2(f, E_n) = \inf\left\{\|f - Q\|_2, Q \in E_n\right\}$.

Le but de la suite de la partie II. est d'exprimer $\|f\|_2$ en fonction des $\dfrac{\langle f, T_k\rangle}{\|T_k\|_2}$.

7. a) Enoncer un théorème justifiant l'existence et l'unicité d'un vecteur $t_n(f)$ dans E_n tel que $\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f, E_n)$ et faire la démonstration.

   b) Exprimer $t_n(f)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev.

   On dit que $t_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f sur E_n.

8. Montrer que $d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^{\,2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2^{\,2}}}$.

9. a) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2^{\,2}}$ est convergente.

   b) Que pensez-vous de la limite de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Convergence en norme quadratique

10. a) Soit h un élément de E, montrer que $\|h\|_2 \leq \sqrt{\pi}\,\|h\|_\infty$.

    b) Montrer en utilisant un théorème de Weierstrass que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f - t_n(f)\|_2 = 0$.

11. a) En déduire que $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2^{\,2}}}$.

    b) Application : un théorème des moments.

    Que peut-on dire d'une fonction h de E telle que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{h(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0$?

Problème 2

On rappelle que, si elle existe alors :
$N_{2,\mathbb{R}_+}(f)=\left(\int_0^{+\infty}[f(t)]^2\,dt\right)^{1/2}$

ESTIMATION OPTIMALE EN NORME QUADRATIQUE DE LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION DE CLASSE $\mathcal{C}^2$ SUR LA DEMI-DROITE $\mathbb{R}_+$

I. Préliminaires

I.1. Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que les intégrales $\int_0^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty}[g(t)]^2\mathrm{d}t$ soient convergentes. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

I.2. Soit f une fonction réelle, continue sur $\mathbb{R}_+$, et ayant une limite ℓ (finie ou non) quand x tend vers $+\infty$. Montrer que, si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\ell = 0$.

I.3. Déterminer toutes les fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\begin{cases} f''+f'+f=0 & \text{sur } \mathbb{R}_+, \\ f(0)+f'(0)=0. \end{cases}$$

Pour une telle fonction, étudier la convergence des intégrales

$$\int_0^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty}[f''(t)]^2\mathrm{d}t.$$

II. Estimation en norme quadratique de la dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que les intégrales $\int_0^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty}[f''(t)]^2\mathrm{d}t$ soient convergentes.

II.1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,f''(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

II.2. Montrer que, pour tous x, X et Y appartenant à $\mathbb{R}_+$:

$$(5) \qquad \int_0^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t = f(x)\,f'(x) - f(0)\,f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t)\mathrm{d}t;$$

$$(6) \qquad \int_X^Y f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left([f(Y)]^2 - [f(X)]^2\right).$$

II.3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 \mathrm{d}t$ est convergente. (Pour cela, on montrera, en utilisant (5) et (6), que si cette intégrale était divergente, on aurait alors $\lim_{x\to+\infty} [f(x)\, f'(x)] = +\infty$, et par suite $\lim_{x\to+\infty} [f(x)]^2 = +\infty$).

II.4. Déduire de ce qui précède que :

(i) les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\, f'(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} f'(t) f''(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes ;

(ii) $\lim_{x\to+\infty} [f(x) f'(x)] = \lim_{x\to+\infty} [f(x)]^2 = \lim_{x\to+\infty} [f'(x)]^2 = 0$.

II.5. Montrer que, pour tout t appartenant à $\mathbb{R}_+$:

$$[f(t) + f'(t) + f''(t)]^2 - ([f(t)]^2 + [f''(t)]^2 - [f'(t)]^2) = ([f + f']^2)'(t).$$

En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} [f''(t)]^2 \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 \mathrm{d}t$$
$$= [f(0) + f'(0)]^2 + \int_0^{+\infty} [f(t) + f'(t) + f''(t)]^2 \mathrm{d}t,$$

et que :

(7) $$[N_{2,\mathbb{R}_+}(f')]^2 \leq [N_{2,\mathbb{R}_+}(f)]^2 + [N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')]^2.$$

II.6. En considérant, pour tout nombre réel λ strictement positif, les fonctions f_λ définies par $f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda} f(\lambda x)$, déduire de (7) que :

$$[N_{2,\mathbb{R}_+}(f')]^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}[N_{2,\mathbb{R}_+}(f)]^2 + \lambda^2 [N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')]^2.$$

En déduire que :

(8) $$N_{2,\mathbb{R}_+}(f') \leq \sqrt{2\, N_{2,\mathbb{R}_+}(f) \cdot N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')}.$$

II.7. Déduire de B.I.3 que (8) est optimale pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

M1 MEI DSL3 du 2/04/2012 (1

CORRIGÉ

Pb 1

Partie I

1. a) $\cos n\theta = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)$

D'après la formule du binôme de Newton on a :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^{n-k} \times (i)^k \sin\theta^k$

$= \sum_{\substack{k=0\\k=2p}}^{n} C_n^{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (-1)^p (\sin\theta)^{2p} + i \sum_{\substack{k=0\\k=2p+1}}^{n} C_n^{2p+1} (\cos\theta)^{n-(2p+1)} (-1)^p (\sin\theta)^{2p+1}$

En prenant la partie réelle on a : $\cos n\theta = \sum_{\substack{k=0\\k=2p}}^{n} C_n^{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (-1)^p \left(1-\cos^2\theta\right)^p$

donc $\cos n\theta = P(\cos\theta)$ où $P(X) = \sum_{\substack{k=0\\k=2p}}^{n} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p} \left(1-X^2\right)^p$

P est bien un polynôme de degré n puisque pour chaque terme de la somme (ie pour chaque p), le monôme de plus haut degré est donné par $C_n^{2p}(-1)^p X^{n-2p} \times (-1)^p X^{2p} = C_n^{2p} X^n$ avec $C_n^{2p} \geq 0$.

b) Supposons qu'il existe P et Q de degré n vérifiant : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos\theta) = Q(\cos\theta) = \cos n\theta$.

Alors P et Q coïncident en une infinité de valeurs, et comme se sont des polynômes, c'est qu'ils sont égaux.

2. a) $x \in [-1,1]$

$T_{n+2}(x) + T_n(x) = \cos\left((n+1)Ar\cos x + Ar\cos x\right) + \cos\left((n+1)Ar\cos x - Ar\cos x\right)$

$= 2\cos\left((n+1)Ar\cos x\right)\cos\left(Ar\cos x\right)$

$= 2T_{n+1}(x) \times x$

donc $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$

b) $T_0 = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

c) $T_0 = 1$. Soit $n \geq 1$, en utilisant le 2.a), on trouve facilement que le coefficient du terme de plus haut degré vaut $2^{(n-1)}$.

3. a) Soit $x \in [-1,1]$. Il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$

donc $T_n(x) = 0 \Leftrightarrow T_n(\cos\theta) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0$

$\Leftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = (2k+1)\frac{\pi}{2n} \qquad k \in \mathbb{Z}$

Pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$, on pose $\theta_k = (2k+1)\frac{\pi}{2n}$, les θ_k sont dans $[0,\pi]$, or, cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc les $\cos\theta_k$ fournissent n racines distinctes à T_n, qui est de degré n. Ce sont donc toutes ses racines.

Ainsi, $T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x - \cos\theta_k)$ où $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$.

b) $\|T_n\|_\infty = 1 \Leftrightarrow |\cos n\theta| = 1$

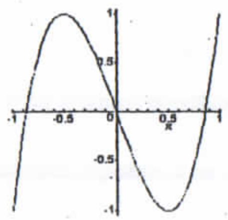
$\Leftrightarrow n\theta = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z}$

Pour $k \in \{0,\dots,n\}$, les $\frac{k\pi}{n}$ sont dans $[0,\pi]$ et donc les $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ sont $(n+1)$ valeurs distinctes de $[-1,1]$. On pose donc $c_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0,\dots,n\}$.

De plus, $T_n(c_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$, donc, pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$, on a $T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$.

c) $n = 3$: $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = -1$.



Partie II

4. Montrons tout d'abord que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$. Cette application est positive, continue sur $]-1,1[$.

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est $t \mapsto \arcsin t$ qui admet des limites finies en 1 et -1.

Donc, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

Soit $h \in E$, $\forall t \in]-1,1[$ $\dfrac{|h(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \le \dfrac{\|h\|_\infty}{\sqrt{1-t^2}}$ qui est intégrable sur $]-1,1[$.

Donc, $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $[-1,1]$.

5. a) Soit $h \in E$ telle que $\forall t \in [-1,1]$ $h(t) \ge 0$ et que $\int_{-1}^{1} \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$. Comme $\forall t \in]-1,1[$ $\dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ge 0$ et que $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$, on en déduit que $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est nulle sur $]-1,1[$. Ainsi, $\forall t \in]-1,1[$, $h(t) = 0$ et par continuité $h \equiv 0$ sur $[-1,1]$.

b) • $\langle , \rangle$ est bien définie grâce à 4. car si $f, g \in E$, $f \times g \in E$.
- $\langle , \rangle$ est symétrique et bilinéaire.
- Soit $g \in E$, on a $\langle g, g \rangle \ge 0$ et si $\langle g, g \rangle = 0$, alors d'après 5.a) $g^2 \equiv 0$ et donc $g \equiv 0$.

6.

- $\langle T_n, T_m \rangle = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta) d\theta$ après le changement de variable $t = \cos\theta$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos[(n+m)\theta] + \cos[(n-m)\theta]\right) d\theta$$

1er cas : si $m = n = 0$ $\quad \langle T_0, T_0 \rangle = \pi$

2ème cas : si $m = n > 0$ $\quad \langle T_n, T_n \rangle = \dfrac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2n\theta) d\theta + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{4n}\underbrace{[\sin 2n\theta]_0^\pi}_{0} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

3ème cas : si $m \ne n$ $\quad \langle T_n, T_m \rangle = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(n+m)}\underbrace{[\sin(n+m)\theta]_0^\pi}_{0} + \dfrac{1}{(n-m)}\underbrace{[\sin(n-m)\theta]_0^\pi}_{0}\right) = 0$

Conclusion : $\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} \pi \text{ si } n = m = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ si } n = m > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$(T_0, \ldots, T_n)$ est ainsi une famille orthogonale donc libre de cardinal $n+1$ dans E_n qui est de dimension $n+1$, c'est donc une base orthogonale de E_n.

7. a) C'est le théorème de la projection orthogonale sur un espace vectoriel de dimension finie.

b) $t_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \langle f, T_k \rangle \dfrac{T_k}{\|T_k\|_2^2}$. C'est le projeté orthogonal de f sur E_n.

8. D'après Pythagore, $\|f - t_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|t_n(f)\|_2^2$

et encore grâce à Pythagore, $\|t_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle f, T_k \rangle^2 \dfrac{\|T_k\|_2^2}{\|T_k\|_2^4}$.

On en déduit que $d_2(f, E_n) = \left(\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}\right)^{1/2}$

9. a) Grâce à 8. on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2} \ge 0$ et donc

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2} \le \|f\|_2^2$.

On a donc une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est bornée. Cette série est donc convergente.

b) Puisque cette série converge, son terme général tend vers zéro, c'est à dire que $\dfrac{\langle f, T_n \rangle}{\|T_n\|_2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ mais la suite $(\|T_n\|_2)$ est bornée donc $\langle f, T_n \rangle = \int_{-1}^{1} \dfrac{f(t) T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

10. a) Soit $h \in E$, on a $\|h\|_2^2 = \int_{-1}^{1} \dfrac{h^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \le \|h\|_\infty^2 \int_{-1}^{1} \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi \|h\|_\infty^2$.

ainsi $\|h\|_2 \le \sqrt{\pi}\, \|h\|_\infty$.

b) D'après Weierstrass, $\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \in \mathbb{R}[X]$ tel que $d^o P_\varepsilon = N_\varepsilon$ et $\|f - P_\varepsilon\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$.

Soit $n \geq N_\varepsilon$ $\|f - t_n(f)\|_2 \leq \|f - P_\varepsilon\|_2$ car pour $n \geq N_\varepsilon$, $P_\varepsilon \in E_n$

$\leq \sqrt{\pi}\|f - P_\varepsilon\|_\infty$ d'après 11.a)

$< \varepsilon$

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$, $\|f - t_n(f)\|_2 < \varepsilon$.

Donc $\|f - t_n(f)\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

11.a) C'est une conséquence immédiate des questions 8. et 10.b).

b) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^{1} \frac{h(t)\ T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$, on a que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle h, T_n \rangle = 0$ et donç d'après 11 a).

$\|h\| = 0$, ie $h = 0$.

Ib2

I/ 1. Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée aux fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}_+$, donne :

$$\int_0^p |f(t)\,g(t)|\,dt \leq \left(\int_0^p [f(t)]^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^p [g(t)]^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} [g(t)]^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

La fonction $p \mapsto \int_0^p |f(t)\,g(t)|\,dt$ est donc croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$, elle converge donc quand p tend vers $+\infty$, ce qui assure la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$.

2. Si $\ell = +\infty$, $\exists A > 0$ tel que $\forall t > A$, $f(t) > 1$. On a alors : $\forall p > A$, $\int_A^p f(t)\,dt > \int_A^p dt = p - A$, et $\lim\limits_{p \to +\infty} \int_A^p f(t)\,dt = +\infty$, ce qui contredit la convergence de $\int_A^{+\infty} f(t)\,dt$.

• Si $\ell = -\infty$, en considérant la fonction $-f$ (qui vérifie aussi les hypothèses) on est ramené au cas précédent.

• Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists B > 0$ tel que $\forall t > B$, $|f(t) - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$, soit $\frac{\ell}{2} \leq f(t) \leq \frac{3\ell}{2}$.
En particulier, $\forall p > B$, $\int_B^p f(t)\,dt \geq \int_B^p \frac{\ell}{2}\,dt = \frac{\ell}{2}(p - B)$, et $\lim\limits_{p \to +\infty} \int_B^p f(t)\,dt$ qui fournit la même contradiction que ci-dessus.

• Si $\ell \in \mathbb{R}_-^*$, on se ramène au cas précédent en considérant la fonction $-f$.
Finalement, il s'ensuit que si f admet une limite en $+\infty$, ce ne peut être que

3 – On a $\begin{cases} f''+f'+f=0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ f(0)+f'(0)=0 \end{cases}$

L'équation caractéristique est $r^2+r+1=0$, qui admet les racines $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions réelles de $f''+f'+f=0$ sont donc les fonctions de la forme : $f(x) = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. La condition $f(0)+f'(0)=0$ entraîne $A+B\sqrt{3}=0$. Finalement, les fonctions réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\begin{cases} f''+f'+f=0 \\ f(0)+f'(0)=0 \end{cases}$ sont de la forme :

$$A e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \qquad (A\in\mathbb{R})$$

Soit $g(x) = e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$, pour $x\in\mathbb{R}_+$. Alors

$g^2(x) = e^{-x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2$. La fonction g est continue sur $[0,+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2g^2(x)=0$, donc, par comparaison avec une intégrale de Riemann, $\int_0^{+\infty} g^2(t)dt$ converge.

On exprime g'' : $g''(x) = -g(x)-g'(x) = -e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$+\frac{1}{2}e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$-e^{-x/2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

d'où finalement, $g''(x) = \frac{2e^{-x/2}}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

Le même type d'argument que précédemment entraîne la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}[g''(t)]^2dt$. On en déduit donc que si f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et solution de $\begin{cases} f''+f'+f=0 \\ f(0)+f'(0)=0 \end{cases}$, les intégrales $\int_0^{+\infty}(f(t))^2dt$ et $\int_0^{+\infty}[f''(t)]^2dt$ existent toutes deux.

II. 1 – D'après le préliminaire I.1, $\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

2 – Une intégration par parties donne :

$$\int_0^{\rho}(f'(t))^2dt = \left[f'(t)f(t)\right]_0^{\rho} - \int_0^{\rho} f(t)f''(t)dt$$

$$= f'(\rho)f(\rho) - f'(0)f(0) - \int_0^{\rho} f(t)f''(t)\,dt.$$

En remarquant que $f'(t)f(t) = \frac{1}{2}(f^2(t))'$, on obtient immédiatement que :

$$\int_x^y f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}\left(f^2(y)-f^2(x)\right).$$

3 – Comme $\int_0^x f(t)f''(t)\,dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ (cf. la question précédente), on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$ (en utilisant (5)). En utilisant alors le préliminaire I.2, on peut assurer que $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\,dt$ diverge et que $\lim_{y\to+\infty} f^2(y) = +\infty$ (en utilisant (6)). Mais ceci est contradictoire avec l'hypothèse de convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$ et le préliminaire I.2. Ainsi $\int_0^{+\infty} (f'(t))^2\,dt$ est convergente.

4 – Les intégrales $\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$, $\int_0 (f'(t))^2\,dt$ et $\int_0 (f''(t))^2\,dt$ étant convergentes, le préliminaire I.1 entraîne (i). De plus (5) permet d'assurer l'existence de $\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x)$ qui ne peut être que nulle puisque $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\,dt$ converge (préliminaire I.2). De même, (6) entraîne l'existence de $\lim_{x\to+\infty} f^2(x)$, qui ne peut être que nulle, puisque $\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$ converge.

En remarquant que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^x f'(t)f''(t)\,dt = \frac{1}{2}\left([f'(x)]^2 - [f'(0)]^2\right)$, on en déduit de la même façon que $\lim_{x\to+\infty} [f'(x)]^2 = 0$.

5 – L'égalité est immédiate puisque $[(f+f')^2]'(t) = 2(f+f')(f'+f'')(t)$

On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R}_+$,

$$\int_0^x f^2(t)\,dt + \int_0^x [f''(t)]^2\,dt - \int_0^x [f'(t)]^2\,dt = \int_0^x (f(t)+f'(t)+f''(t))^2\,dt - \int_0^x ((f+f')^2)'$$

Le second terme du membre de droite donne $-f^2(x) - f'^2(x) - 2f(x)f'(x) + (f(0)+f'(0))^2$ et tend vers $(f(0)+f'(0))^2$ quand x tend vers $+\infty$, d'après ii

Les trois intégrales du terme de gauche étant convergentes, la première intégrale du membre de droite l'est également et on obtient l'égalité voulue en faisant tendre x vers $+\infty$.

Le membre de droite de cette dernière égalité étant positif, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} (f'(t))^2\,dt \le \int_0^{+\infty} (f(t))^2\,dt + \int_0^{+\infty} [f''(t)]^2\,dt, \text{ soit encore :}$$

$$[N_{2,\mathbb{R}_+}(f')]^2 \le [N_{2,\mathbb{R}_+}(f)]^2 + [N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')]^2.$$

6 – La fonction f_λ est C^2 sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^x f_\lambda^2(t)\,dt = \lambda\int_0^x f^2(\lambda t)\,dt$

$$= \lambda\int_0^{\lambda x} f^2(u)\frac{du}{\lambda}$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} f_\lambda^2(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f^2(u)\,du$ est convergente et $N_{2,\mathbb{R}_+}(f_\lambda) = N_{2,\mathbb{R}_+}(f)$

De même : $\int_0^x (f_\lambda''(t))^2 dt = \lambda^5 \int_0^x [f''(\lambda t)]^2 dt = \lambda^4 \int_0^{\lambda x} [f''(u)]^2 du$.

$\int_0^{+\infty} [f_\lambda''(t)]^2 dt$ est donc convergente et $N_{2,\mathbb{R}_+}(f_\lambda'') = \lambda^2 N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')$.

On peut de même vérifier que $N_{2,\mathbb{R}_+}(f_\lambda') = \lambda N_{2,\mathbb{R}_+}(f')$.

En appliquant (7) à la fonction f_λ, on obtient :

$$\lambda^2 (N_{2,\mathbb{R}_+}(f'))^2 \leq (N_{2,\mathbb{R}_+}(f))^2 + \lambda^4 (N_{2,\mathbb{R}_+}(f''))^2$$

ou encore $(N_{2,\mathbb{R}_+}(f'))^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}(N_{2,\mathbb{R}_+}(f))^2 + \lambda^2 (N_{2,\mathbb{R}_+}(f''))^2$

En procédant d'une manière similaire à la question A.II.2b, on montre que la fonction $G(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}(N_{2,\mathbb{R}_+}(f))^2 + \lambda^2 (N_{2,\mathbb{R}_+}(f''))^2$ atteint son minimum pour $\lambda_0^2 = \frac{N_{2,\mathbb{R}_+}(f)}{N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')}$ si $N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')$ est non nul.

Comme $G(\lambda_0) = 2 N_{2,\mathbb{R}_+}(f) N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')$, on en déduit (8).

Si $N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')$ est nulle, f'' est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$ (car f'' est continue, f est donc affine et f ne peut être que nulle puisque $\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$ converge (cf. préliminaire I.2), f est donc identiquement nulle et $N_{2,\mathbb{R}_+}(f') = 0 \Rightarrow$ d'où (8) est encore vérifiée.

7_ Soit g une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, solution du système de la question (I.3). Alors, puisque $g'' + g' + g = 0$ et $g(0) + g'(0) = 0$ (II.5) entraîne que $N^2_{2,\mathbb{R}_+}(g) + N^2_{2,\mathbb{R}_+}(g'') = N^2_{2,\mathbb{R}_+}(g')$.

Mais alors, d'après (8), on a : $N^2_{2,\mathbb{R}_+}(g) + N^2_{2,\mathbb{R}_+}(g'') \leq 2 N_{2,\mathbb{R}_+}(g) N_{2,\mathbb{R}_+}(g'')$

ce qui n'est possible que si on a égalité car $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad a^2 + b^2 \geq 2ab$,

donc finalement $N_{2,\mathbb{R}_+}(g') = \sqrt{2 N_{2,\mathbb{R}_+}(g) N_{2,\mathbb{R}_+}(g'')}$ pour cette fonction g.

On en déduit que (8) est optimale pour les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.