M1 MEI DSL 2 du 03/03/2012

Problème 1

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats dans la suite du problème.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLEME

Le plan affine euclidien, noté $\mathcal{P}$, est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ d'origine O. A tout point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, on associe son affixe $z = x + iy$; ceci permet d'identifier le plan à l 'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Un *point entier* du plan est un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs. L'ensemble de tous les points entiers est appelé *réseau*. Le réseau s'indentifie à la partie de $\mathbf{C}$, notée $\mathbf{Z}[i]$, définie par $\mathbf{Z}[i] = \{a + ib/ (a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\}$.

L'objectif général du problème réside en la recherche et l'étude de configurations planes soumises à des conditions mettant en jeu les entiers :

Thème A : recherche de polygones réguliers dont les sommets appartiennent au réseau;

Thème B : recherche et étude de parties du plan dont les distances mutuelles entre les points sont des entiers;

Thème A : Polygones réguliers à sommets entiers

On se propose de démonter que les seuls polygones réguliers convexes à sommets entiers sont les carrés. Pour ceci, on établit d'abord un résultat préliminaire qui sera utilisé à nouveau dans le thème B.

Dans tout ce thème A, les coordonnées des points sont définies dans $\mathcal{R}$.

A.I Question préliminaire

1. Soient θ un nombre réel et n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta . \cos n\theta - \cos(n-1)\theta$$

2. En déduire qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes tels que, pour tout n, élément de $\mathbf{N}^*$, P_n vérifie les propriétés suivantes:

   – P_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers et unitaire (c'est-à-dire tel que le coefficient de X^n soit égal à 1)

   pour tout réel θ, $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.

3. Soit θ un nombre réel tel que $\dfrac{\theta}{\pi}$ soit rationnel. Montrer que $2\cos\theta$ est solution d'une équation de la forme
$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 = 0 \tag{1}$$
où $n \in \mathbf{N}^*$ et, pour $0 \leq i \leq n-1$, $a_i \in \mathbf{Z}$.

4. Soit θ un nombre réel. On suppose que $\dfrac{\theta}{\pi}$ et $\cos\theta$ sont rationnels.
Montrer que $\cos\theta \in \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$. (On pourra commencer par montrer que toute solution rationnelle de l'équation (1) est un entier relatif)

A.II Application aux polygones réguliers à sommets entiers

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On rappelle qu'une suite $(A_1, A_2, ..., A_n)$ de n points distincts du plan définit un polygone régulier convexe P ayant pour sommets ces n points s'il existe une rotation r d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ ou $-\dfrac{2\pi}{n}$ telle que $r(A_i) = A_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $r(A_n) = A_1$. On sait qu'une telle rotation est unique. On convient d'écrire $P = (A_1, ..., A_n)$. Le centre Ω de la rotation r s'appelle le centre de P.

1. Soit $P = (A_1, ..., A_n)$ un polygone régulier convexe tel que les n sommets sont des points entiers. Soit Ω son centre

   (a) Montrer que Ω est l'isobarycentre de l'ensemble des sommets de P, et en déduire que Ω est à coordonnées rationnelles.

   (b) En notant ω l'affixe de Ω, rappeler la représentation analytique de la rotation r de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ ou $-\dfrac{2\pi}{n}$, au moyen des affixes.

   (c) En écrivant que $r(A_1) = A_2$, montrer que $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{n}$ sont rationnels. En déduire, au moyen de $A.I.4$, que n est égal à 4, c'est-à-dire que P est un carré.

2. Soient A_1 et A_2 deux points entiers distincts. Montrer que les deux carrés $C = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ et $C' = (A_1, A_2, A_3', A_4')$ admettant A_1 et A_2 comme sommets consécutifs ont tous leurs sommets entiers. Préciser les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de A_3, A_4, A_3' et A_4' en fonction des coordonnées (x_1, y_1) de A_1 et (x_2, y_2) de A_2.

Thème B : Ensembles à distances entières

Un sous-ensemble non vide E de points du plan est appelé *ensemble à distances entières* lorsque, pour tous points A et B appartenant à E, la distance AB est un nombre entier. La partie $B.I$ étudie quelques exemples. La partie $B.II$ établit qu'un ensemble infini à distances entières est nécessairement contenu dans une droite. Par contre, dans la partie $B.III$, on montre que, pour tout entier n, $n \geq 3$, il existe un ensemble à distances entières constitué de n points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

B.I Etude de quelques exemples

1. Les sommets d'un carré, d'un rectangle, d'un losange peuvent-ils former un ensemble à distances entières?

2. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 112.

(a) Justifier l'existence et l'unicité du point D défini par les conditions suivantes : $AD = 73$, $BD = 57$, D et C d'un même côté de la droite (AB).

(b) Calculer les coordonnées (x, y) de D dans le repère $\mathcal{R}' = \left(O', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où O' est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{O'A}}{\left\|\overrightarrow{O'A}\right\|}$ et $\overrightarrow{j} = \dfrac{\overrightarrow{O'C}}{\left\|\overrightarrow{O'C}\right\|}$. On observera que x est rationnel, et on l'écrira sous forme d'une fraction irréductible. On observera également que $y = y_1\sqrt{3}$ où y_1 est un nombre rationnel qu'on écrira sous forme d'une fraction irréductible.

(c) Montrer que $E = \{A, B, C, D\}$ est un ensemble à distances entières.

B.II Ensembles infinis à distances entières

1. Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole et $\mathcal{R}''$ un repère cartésien du plan dans lequel $\mathcal{H}$ a pour équation $xy = 1$.

   Soit Γ une courbe du plan, d'équation, dans $\mathcal{R}''$,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

   où a, b, c, d, e ne sont pas tous nuls.

   Montrer que si $\Gamma \cap \mathcal{H}$ est infini alors $\Gamma = \mathcal{H}$, et donner un majorant du nombre de points de $\Gamma \cap \mathcal{H}$ lorsque $\Gamma \neq \mathcal{H}$.

2. Soit E un ensemble à distances entières contenant trois points A, B, C non alignés. On pose $p = AB$, $q = AC$, et, pour $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$,

$$U_j = \{M \in \mathcal{P} / |MA - MB| = j\} \text{ et } V_k = \{M \in \mathcal{P} / |MA - MC| = k\}$$

   (a) Préciser la nature géométrique des ensembles U_j et V_k pour $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$. On distinguera les cas $j = 0$ et $j = p$ (resp. $k = 0$ et $k = q$) des cas $0 < j < p$ (resp. $0 < k < q$).

   (b) Déduire de $B.II.1$ que, quelque soit $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$, $U_j \cap V_k$ est une partie finie (éventuellement vide) du plan.

   (c) Démontrer que E est inclus dans $\bigcup_{0 \leq j \leq p} U_j$ et dans $\bigcup_{0 \leq k \leq q} V_k$, et en déduire que E est fini.

3. Etant donné un point A et un vecteur $\overrightarrow{v}$, on note $E_{A,\overrightarrow{v}}$ l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{v}$ avec $x \in \mathbf{Z}$.

   Soit E une partie infinie du plan. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

   ($*$) E est à distances entières

   ($**$) Il existe un point A et un vecteur $\overrightarrow{v}$ de norme 1 tels que $E \subset E_{A,\overrightarrow{v}}$.

B.III Ensembles finis à distances entières

Soit ϕ le nombre réel défini par $\cos\phi = \dfrac{4}{5}$, $0 < \phi < \pi$. Pour tout entier naturel p, on note M_p le point d'affixe $e^{2ip\phi}$.

1. Montrer que les points M_p , p appartenant à $\mathbf{N}$, sont deux à deux distincts.

2. Soient p et q deux entiers naturels. Prouver que la distance M_pM_q est égale à $2\left|\sin\left(p - q\right)\phi\right|$. En déduire que M_pM_q est un nombre rationnel.

3. Soit un entier n supérieur ou égal à 3. Montrer qu'il existe un ensemble à distances entières, constitué de n points, et contenu dans un cercle de centre O.

PB 2

RACINES CARREES DE MATRICES

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :

$M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles de taille n.

$M_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne.

$GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.

I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

Id l'application identité de $\mathbb{R}^n$.

Pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée.

$S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

$S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des réels, on note $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans cet ordre.

Si p est un entier naturel non nul, on notera $\| \ \|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^p$:

si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^p$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq p} |x_i|$.

Objectifs

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R de $M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.

On note $\mathrm{Rac}(A)$ l'ensemble des racines carrées de A, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Rac}(A) = \{R \in M_n(\mathbb{R}),\ R^2 = A\}.$$

Le problème propose de déterminer les racines carrées de A dans différents exemples, (on pourra constater qu'une matrice peut admettre parfois une infinité de racines) et d'étudier quelques propriétés topologiques de $\mathrm{Rac}(A)$.

Les trois premiers exemples de la partie I sont tous **indépendants**.

I – DETERMINATION DE Rac(A) DANS QUELQUES EXEMPLES

Exemple 1 : Cas où A possède n valeurs propres distinctes

On suppose que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$.

1) Montrer que A et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ sont semblables, (c'est-à-dire justifier l'existence d'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P\,D\,P^{-1}$), puis montrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}R\,P$ est une racine carrée de D.

2) Racines carrées de D.

Soit S une racine carrée de D.

a) Montrer que $DS = SD$.

b) En déduire que la matrice S est diagonale.

c) On note $S = \operatorname{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$?

d) Que peut-on dire de Rac(A) si A admet une valeur propre strictement négative ?

e) Si on suppose que toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1;1\}$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3) Ecrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées A admet-elle ? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).

4) Application :

Ecrire les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice P que l'on déterminera.

Exemple 2 : Cas où A est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$

Dans cet exemple on cherche à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.

Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$, une racine carrée de la matrice nulle.

5) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On note r le rang de f.

a) Comparer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$, puis montrer que $r \leq \dfrac{n}{2}$.

b) On suppose f non nul, donc $r \geq 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} f$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, \ldots, e_{n-r})$ pour former une base de $\operatorname{Ker} f$.

Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note u_i un vecteur tel que $f(u_i) = e_i$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-r}, u_1, \ldots, u_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puis écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On notera M_r cette matrice.

6) **a)** Déterminer les racines carrées dans M_n (IR) de la matrice nulle.

b) Application : Déterminer dans M_4 (IR), les racines carrées de la matrice nulle.

Exemple 3 : Cas où $A = I_n$

7) Soit R une racine carrée de l'unité I_n.

a) Vérifier que R est une matrice inversible.

b) Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.

8) Déterminer Rac(I_n). On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1;1\}$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemple 4 : Cas où A est une matrice symétrique réelle

Dans cet exemple, toutes les matrices que l'on considérera appartiennent à M_n (IR).

9) Une matrice symétrique admet-elle nécessairement une racine carrée ?

10) Montrer qu'une matrice symétrique positive admet au moins une racine carrée qui est elle-même symétrique et positive.

Remarque : on peut montrer l'unicité de cette racine carrée dans $S_n^+(\mathbb{R})$ mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème.

II – ETUDE TOPOLOGIQUE DE Rac(A)

11) Si A est une matrice de M_n (IR) qui a pour coefficients $\left(a_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$, montrer que l'on définit une norme en posant $N(A) = \max\limits_{1\le i,j\le n} \left|a_{i,j}\right|$.

On munit M_n (IR) de cette norme N.

12) Fermeture de Rac(A)

Soit A une matrice de M_n (IR). Montrer que Rac(A) est une partie fermée de M_n (IR).

13) Etude du caractère borné de Rac(I_n)

a) Un exemple instructif

Pour tout entier naturel q, on pose $S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $S_q^{\,2}$. Rac(I_2) est-elle une partie bornée de M_2 (IR) ?

b) Rac(I_n) est-elle une partie bornée de M_n (IR) pour $n \ge 3$?

c) Application : Pour cette question, $n \ge 2$.

Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\ \|$ « surmultiplicative » sur GL_n(IR), c'est-à-dire vérifiant pour tous A et B dans GL_n(IR), $\|AB\| \ge \|A\|\|B\|$.