M1MEI DSL1 du 02/02/2012

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Problème 1

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. Soit n un entier supérieur ou égal à un. on dit qu'une fonction réelle f définie sur un intervalle $I = (a, b)$ de $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois continûment dérivable sur I et on note $f^{(m)}$ la dérivée d'ordre m de f avec $0 \leq m \leq n$ et les conventions usuelles $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.
On désigne par $N_{\infty,I}(f)$:

$$N_{\infty,I}(f) = \operatorname*{Sup}_{x\in I}|f(x)|$$

Le problème est centré sur les estimations des dérivées intermédiaires $f^{(m)}$ à l'aide de f et $f^{(n)}$ pour les normes $N_{\infty,I}$.

ESTIMATIONS DE LA DÉRIVÉE PREMIÈRE D'UNE FONCTION DE CLASSE $\mathcal{C}^2$

I. Estimation ponctuelle pour le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ positives

Dans toute cette partie A.I, f désigne une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

I.1. *Estimation ponctuelle de f'*

a. Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que, pour tout $(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') \geq 0.$$

b. En déduire que, pour tout réel x :

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2\, N_{\infty,\mathbb{R}}(f'')\, f(x)}. \tag{1}$$

I.2. *Application*

On pose $g = \sqrt{f}$.

a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point x où $f(x) \neq 0$.

b. Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = 0$.

1) Déduire de (1) que $f'(x_0) = 0$.

2) Montrer que $f''(x_0) \geq 0$. (En étudiant les variations de f au voisinage de x_0, on remarquera que si $f''(x_0)$ était strictement négatif, f prendrait des valeurs strictement négatives).

3) Montrer que, pour tout réel x, $x \neq x_0$, il existe un réel c, compris entre x_0 et x tel que $f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c)$.

En déduire que si $f''(x_0) > 0$, g n'est pas dérivable en x_0.

c. Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ et soit r un réel strictement positif. On note I_r l'intervalle $[x_0 - r, x_0 + r]$, I_{2r} l'intervalle $[x_0 - 2r, x_0 + 2r]$ et $M_r(f'') = N_{\infty,I_{2r}}(f'')$. On suppose que $M_r(f'') \neq 0$.

1) Montrer que, pour tout x appartenant à I_r, $|f'(x)| \leq r\, M_r(f'')$.

2) Soit x un élément de I_r. Montrer que, si $2M_r(f'')\cdot f(x) < [f'(x)]^2$, le trinôme en λ, $\tau(\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} M_r(f'')$, admettrait deux racines distinctes λ_1 et λ_2 telles que $\mu = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ appartienne à l'intervalle $[-r, r]$ et que $f(x + \mu) \leq \tau(\mu) < 0$.

En déduire que, pour tout x appartenant à I_r,

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2\,M_r(f'')\cdot f(x)}.$$

d. Déduire des questions précédentes que, si f est une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f'' s'annule en tous les zéros de f (s'il en existe), alors $g = \sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

II. Estimation en norme uniforme sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$

II.1. Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}_+$, de longueur $2r$, avec $r > 0$, et soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

A l'aide de la formule de Taylor avec reste de Lagrange, appliquée à la fonction f en l'un des deux couples $(x, x+r)$ ou $(x, x-r)$, montrer que, pour tout élément x de I,

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$

En déduire que :

$$(2) \qquad N_{\infty,I}(f') \leq \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$

II.2. *Application 1*

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$: on suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

a. Déduire de la question précédente que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout $r > 0$,

$$(3) \qquad N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \leq \frac{2}{r} N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'').$$

b. En minimisant le second membre de (3) par rapport à $r > 0$, montrer que :

$$(4) \qquad N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \leq 2\sqrt{N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f) . N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'')}.$$

II.3. *Application 2*

Soient a et b deux fonctions réelles sur $\mathbb{R}_+$, bornées respectivement par A et B sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

a. En utilisant (2), montrer que si f est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ de (E), pour tout réel $r > 0$ et tout intervalle I de longueur $2r$ contenu dans $\mathbb{R}_+$, on a :

$$(1 - \frac{r}{2}A)\, N_{\infty,I}(f') \leq \left(\frac{2}{r} + \frac{r}{2}B\right) N_{\infty,I}(f).$$

b. En déduire que si f est une solution bornée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ de (E), alors f' et f'' sont aussi bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Problème 2

On note E l'ensemble de toutes les suites réelles $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad A_n \geqslant 1, \quad A_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : \quad (A_n)^2 \leqslant A_{n+1}A_{n-1}$$

1. Trouver toutes les suites constantes contenues dans E.
   Vérifier que la suite de terme général $A_n = n!$ est élément de E.

2. Soit $A \in E$. On définit les suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\lambda_0 = \mu_0 = 1$ puis $\lambda_n = \dfrac{A_{n-1}}{A_n}$ et $\mu_n = \dfrac{1}{(A_n)^{1/n}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

   (a) Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
   En déduire que pour tout entier $n > 0$ on a $(\lambda_n)^n \leqslant \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$.

   (b) Montrer que la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

   (c) Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in [0, n] \cap \mathbb{N} : \quad \dfrac{A_{n+1}}{A_{n+1-j}} \geqslant \dfrac{A_n}{A_{n-j}}$.
   En déduire alors que $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in [0, n] \cap \mathbb{N} : \quad A_j A_{n-j} \leqslant A_n$.

   (d) Établir, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'inégalité $\lambda_n \leqslant \mu_n$. En déduire que si la série de terme général (μ_n) est convergente, alors la série de terme général (λ_n) est convergente.

3. On donne deux suites réelles à termes tous strictement positifs notées (a_n) et (c_n) avec $n > 0$.
   On suppose de plus que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ est convergente.

   (a) On pose $u_n = (a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}$ et $b_n = (c_1c_2\ldots c_n)^{-1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que $u_n \leqslant \dfrac{b_n}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_kc_k$.
   Indication : on pourra utiliser l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique

$$(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$$

   valable si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des réels strictement positifs.

   (b) On suppose de plus que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{b_k}{k}$ est convergente et on note $B_k = \sum\limits_{p=k}^{+\infty}\dfrac{b_p}{p}$.
   Montrer que $\sum\limits_{p=1}^{n} u_p \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} B_kc_ka_k$.

   (c) On choisit maintenant $c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$.
   En déduire que la série de terme général u_n est convergente et que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant e\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

4. On reprend les notations de la question 2. Établir, en utilisant ce qui précède, que si la série de terme général (λ_n) est convergente, alors la série de terme général (μ_n) est convergente.