Université Paul Sabatier **Octobre 2010**

☯ ☢ ☯ MASTER Mathématiques pour l'enseignement et l'ingénierie ☯ ☢ ☯

MEIS7M2 – Feuille d'exercices : Intégrales à paramètres, échanges $\sum\int = \int\sum$.

Exercice 1. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$: $g_n(x) = \sin(nx)$. *Montrer que la suite* $(g_n)_n$ *n'admet aucune sous-suite simplement convergente vers* 0 *sur* $[0,1]$.

Exercice 2. ***(Un lemme de Cantor).*** *Soient* $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ *deux suites de nombres réels telles que la suite de fonctions* $(\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))_n$ *converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur* $\mathbb{R}$.

(1) *Montrer que* $\lim_\infty \alpha_n = \lim_\infty \beta_n = 0$. *(pour la seconde limite on pourra raisonner par l'absurde..)*

(2) *Montrer que la conclusion subsiste si on a la convergence simple seulement sur* $[a,b]$, $a<b$. *Pour cela en posant* $f_n(x) = \frac{(\alpha_n\cos(nx)+\beta_n\sin(nx))^2}{\alpha_n^2+\beta_n^2}$ *et, raisonnant par l'absurde montrer que l'on peut extraire de* $(f_n)_n$ *une sous-suite simplement convergente vers zéro sur* $[a,b]$...

Exercice 3. *Soient* $p, q \in \mathbb{R}_+^\star$, *montrer que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{nq+p}$.

Exercice 4. *On pose pour* $\alpha > 0 : f(\alpha) = \int_0^1 \log(t)\log(1-t^\alpha)dt$.

(1) *Vérifier que* f *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+^\star$.

(2) *Montrer que* $f(\alpha) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k\alpha+1)^2}$.

(3) *Montrer que* $\lim_{\alpha\to 0_+} f(\alpha) = +\infty$.

(4) *Montrer que* $f(\alpha) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\zeta(3)}{\alpha^2}$.

Exercice 5. ***Un calcul de l'intégrale de Dirichlet*** $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$. *On considère l'application* $f(x) := \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$.

(1) *Montrer que l'intégrale impropre* $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ *est convergente au sens de Riemann mais divergente au sens de Lebesgue.*

(2) *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.

(3) *En déduire une forme explicite de* f *sur* $\mathbb{R}_+^\star$.

(4) *Montrer que* f *est continue à l'origine.*

(5) *En déduire que* $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6. ***Un calcul de l'intégrale de Gauss*** $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$. *On considère l'application* $f(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$.

(1) *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$.

(2) *En déduire que* f *est solution d'une équation différentielle.*

(3) *Montrer que* $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *(on pourra introduire la fonction auxiliaire* $g(t) = e^{-t}f(t)$...*)*.

Exercice 7. ***Autour de la fonction Gamma :*** *Soit* $f : (x,t) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \longmapsto f(x,t) := t^{x-1}e^{-t}$. *Montrer que pour tout* $x > 0$ *la fonction*$f(x,\cdot)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+^\star$. *On définit alors la fonction Gamma par*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(1) *Montrer que* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star)$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}$:$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \big(\log(t)\big)^k t^{x-1}e^{-t}dt$.

(2) *Etablir successivement* $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),\ \forall x > 0$; $\Gamma(n+1) = n!,\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

(3) *A l'aide de la formule* $e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ *et de la suite de fonctions de terme général* $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \chi_{]0,n]}(t),\ n \geq 1$, *montrer que* $\Gamma'(1) = -\gamma$ *(*γ *est la constante d'Euler).*

(4) *Aprés avoir établi pour* $x > 0$: $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$ *montrer que* $\Gamma'(n+1) = n!\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma\right),\ n \geq 1$.

(5) *Au moyen du changement de variables* $s = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$*, établir pour* $x > 0$ *:* $\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds$ *où* $\varphi(x,s) := x \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}$

(6) *Montrer que* $\forall s \in]-\sqrt{x}, 0] \;:\; \varphi(x,s) \leq -\frac{s^2}{2}$ *et* $\forall s \geq 0,\ x \geq 1 \;:\; \varphi(x,s) \leq \varphi(1,s)$.

(7) *En déduire* $\lim_{x\to+\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ *puis la formule de Stirling*

$$\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}.$$

(8) *Montrer que pour tout* $x > 0$ *:* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x)$*, et en déduire la formule de Gauss :* $\forall\, x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

(9) *Puis celle de Weierstrass :* $\forall\, x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = x e^{\gamma x} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$.

(10) *On note* $\psi \;:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$*, l'application définie pour* $x > 0$ *par* $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$*. Démontrer que pour tout* $x > 0 \;:\; \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x \sum_{n\geq 1} \frac{1}{x(x+n)}$*, et en déduire que* $\Gamma'(1) = -\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x} \log(x) dx$.

(11) *(Le théorème de Bohr-Mollerup) Montrer que* $\log\Gamma$ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+^\star$*. Réciproquement, soit* $f \;: \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ *une application log-convexe vérifiant* $f(1) = 1$ *et* $\forall\, x > 0,\ f(x+1) = x f(x)$*. ; montrer (à l'aide de la formule de Gauss) que* $f = \Gamma$

5 octobre 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr
http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html