En attendant de corriger les copies du bac, voici pour ne pas trop s'ennuyer quelques exercices divers et avariés. Un corrigé suivra.

Exercice 1 : Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$; si f est surjective montrer qu'elle admet une infinité de zéros.

Exercice 2 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable et vérifiant

$$f'(x) \geq f(x) > 0, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{1}{f(a)} - \frac{1}{f(b)}.$

Exercice 3 : Soient $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n} = 1.$$

Montrer que $\quad u_k \leq n^{2^{k-1}}, \quad k = 1 \ldots n.$

Exercice 4 : Pour $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^\star)$ croissante et $k \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\left(\int_0^\infty \frac{t^k}{f(t)} dt \quad \texttt{converge}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\int_0^\infty \frac{t^k}{f(t)+f'(t)} dt \quad \texttt{converge}\right).$$

Indic : vous pouvez par exemple faire une récurrence sur k...

Exercice 5 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^2, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

En déduire que si $a_1, a_2, \ldots, a_{16} \in \mathbb{R}_+$ sont tels que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{16} = 100 \quad \& \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{16}^2 = 1000,$$

alors $a_i \leq 25$ pour tout $1 \leq i \leq 25$.

Exercice 6 : Montrer que l'ensemble des rationnels de la forme

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+k}, \quad k, n \in \mathbb{N}$$

est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7 : Soit $c > 0$, déterminer toutes les applications $f \in \mathscr{C}^2([0, 2c])$ vérifiant

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(c - \frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2c.$$

Indic : commencez par montrer que f'' est constante et pour cela montrer que le sup de f'' est forcément atteint en $x = 0$ et faire de même pour l'inf...

Exercice 8 : Soit $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2x + 3x^2 + ... + 2009x^{2010}}$, que vaut $f^{(2009)}(0)$?

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout carré $ABCD$ du plan : $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 10 : On dira qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}^2[x, y]$ est équilibré si sa moyenne sur tout cercle centré à l'origine est nulle i.e. pour tout $r > 0$: $\int_0^{2\pi} P(r\cos(\theta), r\sin(\theta))d\theta = 0$. L'ensemble $\mathscr{H}$ des polynômes équilibrés de degré ≤ 2009 est un espace vectoriel, quel est sa dimension ?

Exercice 11 : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Si $B \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}[A]$, montrer que $B^{-1} \in \mathbb{R}[A]$.

Exercice 12 : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $B^n = 0$, montrer que $\det(A+B) = \det(A)$.

Exercice 13 : Soit $A \in M_n(\mathbb{N})$ une matrice à coefficients entiers inversible. On suppose que l'ensemble des coefficients de toutes les puissance A^r, $(r \in \mathbb{N}^\star)$ de A est fini et on se propose de montrer que A est la matrice d'une permutation (i.e. il existe une permutation π de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telles que $Ae_i = e_{\pi(i)},\ 1 \leq i \leq n$).

0) Montrer que toute matrice de permutation vérifie bien les hypothèses.
1) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^r = I_n$.
2) Montrer qu'il existe une permutation π de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \neq 0$.
3) Notons P la matrice associée à la permutation précédente et écrivons $A = P + B$. Montrer que B est nulle.

Exercice 14 : Soit $P(x) = 6 + 4x + 3x^2 + 8x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 6x^6 \in \mathbb{R}[x]$, on pose pour $x \in [0, 5[$:

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{P(t)} dt.$$

En quels point de $[0, 5[$, g atteint-elle sa borne inférieure ? Que dire de sa borne supérieure ?

◕ 20 mai 2010 ◕ Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE. Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr Page ouèb : http ://www.math.univ-toulouse.fr/~lassere/agreg.html