☯ ☢ ☯ AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES ☯ ☢ ☯
Topologie & Continuité – Samedi 12 JUIN 2010.

Nous traiterons en priorité ceux signalés par le symbole (☕) pour les autres, profitez des vacances pour y réflechir et n'hesitez pas à m'envoyer un mèl si vous rencontrez un problème.

1. Topologie, Continuité.

Exercice 1. *(☕) Montrer que sur tout $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) espace vectoriel on peut contruire une norme (indic : tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul admet une $\mathbb{K}$-base construisez la norme à partir de cette base...).*

Exercice 2. *(☕) (Autour du théorème de Riesz) Soit E un $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) espace vectoriel. On se propose de démontrer la réciproque du théorème de Riesz : « si toutes les normes sur E sont équivalentes, alors E est de dimension finie ».*

1) Montrer que si toutes les normes sur E sont équivalentes alors toutes les formes linéaires sur E sont continues.

2) Montrer que si E n'est pas de dimension finie, alors pour toute norme sur E on peut construire une forme linéaire discontinue ((indic : tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel admet une $\mathbb{K}$-base construisez la forme linéaire à partir de cette base...).

3) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{\,a+b\sqrt{2},\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2. Pour $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ on pose $N_1(a+b\sqrt{2})=|a+b\sqrt{2}|,\ N_2(a+b\sqrt{2})=|a|+|b|$; montrer que l'on définit ainsi deux normes sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ qui ne sont pas équivalentes. Commentaires ?

Exercice 3. *(☕) 1) Soient E un espace vectoriel normé, $\varphi\in E^\star$ une forme linéaire sur E. Montrer que φ est continue si et seulement si $\ker(\varphi)$ est fermé dans E. Si φ n'est pas continue, montrer que $\ker(\varphi)$ est dense dans E.*

2) Soient E un espace vectoriel normé, $\psi\in E'$ une forme linéaire continue non identiquement nulle sur E et $e\in E$ tel que $\psi(e)\neq 0$. Montrer que $|||\psi|||=\dfrac{|\psi(e)|}{\mathrm{dist}(\mathrm{e},\ker(\psi))}$.

3) Soit.........

Exercice 4. *Montrer que tout sous-espace strict d'un espace vectoriel normé E est d'intérieur vide.*

Exercice 5. *Soit $a>0$. Sur l'espace $\mathscr{C}^0([0,1])$ on considère les normes :*

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|,\quad \|f\|_1=a\int_0^1|f(t)|dt.$$

1) Vérifier que ce sont bien deux normes sur $\mathscr{C}^0([0,1])$.

2) Montrer que $\|f\|:=\min\{\|f\|_\infty,\|f\|_1\}$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1])$ si et seulement si $a\leq 1$.

Exercice 6. *(☕) Soient $U\ :\ \mathscr{C}^0([0,1])\ni f\mapsto U(f)=f(1)\in\mathbb{R},\ V\ :\ \mathscr{C}^0([0,1])\ni f\mapsto U(f)=f^2\in\mathscr{C}^0([0,1])$. Pour $f\in\mathscr{C}^0([0,1])$ on pose $\|f\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$ et $\|f\|_p=\left(\int_0^1|f(t)|^pdt\right)^{1/p},\ (1\leq p<+\infty)$.*

1) Montrer que $U\ :\ (\mathscr{C}^0([0,1]),\|\cdot\|_\infty)\to\mathbb{R}$ est continue.

2) En est-il de même pour $U\ :\ (\mathscr{C}^0([0,1]),\|\cdot\|_p)\to\mathbb{R}$?

3) Montrer que $V\ :\ (\mathscr{C}^0([0,1]),\|\cdot\|_\infty)\to(\mathscr{C}^0([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ est continue mais pas uniformément.

4) Montrer que $V\ :\ (\mathscr{C}^0([0,1]),\|\cdot\|_p)\to(\mathscr{C}^0([0,1]),\|\cdot\|_p)$ n'est pas continue (Indic : pour cela si $b>0$ et $0<a<1$ considérer $f(x)=b(1-x/a)$ pour $x\in[0,a]$ et $f(x)=0$ pour $x\in]a,1]$ et choisir convenablement a et b dépendant de $n\in\mathbb{N}$...).

5) Montrer que $V\ :\ (\mathscr{C}^0([0,1]),\|\cdot\|_\infty)\to(\mathscr{C}^0([0,1]),\|\cdot\|_p)$ est continue mais pas uniformément.

Exercice 7. *(☕) 1) Vérifier que pour $P=\sum_k a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$: $N_1(P)=\sum_k|a_k|$ et $N_2(P)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P(x)e^{-|x|}\right|$ définissent deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.*

2) Etudier la continuité des applications

$$T\ :\ \begin{cases}\mathbb{R}[X]\longrightarrow\mathbb{R}[X]\\ P\longmapsto T(P)=P(X+1)\end{cases}\qquad L_Q\ :\ \begin{cases}\mathbb{R}[X]\longrightarrow\mathbb{R}[X]\\ P\longmapsto L(P)=PQ\end{cases}$$

dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}[X],N_1)$, puis dans l'espace $(\mathbb{R}[X],N_1)$.

2. Continuité : Fonctions réelles.

Exercice 8. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une application surjective, montrer qu'elle admet une infinité de zéros.*

Exercice 9. *1) Soit $f : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ une application surjective et strictement monotone. Montrer que f est bijective, continue sur $[a,b]$ et que f^{-1} est continue sur $[\alpha, \beta]$.*

2) Montrer que toute application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement monotone vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires, est continue.

Exercice 10. *(☕) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $(a_n)_n$ une suite d'éléments de A sans points d'accumulation dans A.*

a) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{4^{-n} + |x - a_n|}$ est définie et continue sur A.

b) Soit K une partie de $\mathbb{R}$ telle que toute fonction continue de K dans $\mathbb{R}$ soit bornée. Montrer que K est compact.

Exercice 11. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.*

1) On suppose que l'image réciproque par f de tout compact K de $\mathbb{R}$ est compacte, montrer que l'image de tout fermé par f est fermé.

2) ce résultat subsiste-t-il si l'on suppose seulement que l'image réciproque de tout singleton est compacte ?

3) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre

- *L'image réciproque par f de tout compact K de $\mathbb{R}$ est compacte.*
- $\displaystyle\lim_{|x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.

4) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant des limites finies en $\pm\infty$, montrer que f est uniformément continue.

Exercice 12. *(☕) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & si \ \ x = \frac{p}{q}, \ p \wedge q = 1, \\ 1, & si \ \ x = 0, \\ 0, & si \ \ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1) Montrer que f est 1-périodique.
2) Montrer que f est discontinue sur $\mathbb{Q}$.
3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
4) Montrer que f est nulle part dérivable.

Exercice 13. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application possédant la propriété des valeurs intermédiaires et telle que $f^{-1}(\{q\})$ soit fermé pour tout $q \in \mathbb{Q}$ (ou une quelconque partie dense dans $\mathbb{R}$). Montrer que f est continue. Connaissez vous un exemple d'une fonction possédant la propriété des valeurs intermédiaires qui ne soit pas continue ?*

Exercice 14. *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$, $g : I \to J$ deux fonctions. Si g est continue sur I et $f \circ g$ sur I, montrer que f est continue sur $g(I)$.*

Exercice 15. *Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ une bijection. Montrer que f est une bijection continue dont l'application réciproque est partout discontinue.*

Exercice 16. *(l'équation fonctionnelle de Cauchy) Il s'agit d'étudier les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant*

$$(\bigstar) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer les solutions de $(\bigstar)$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.
2) Déterminer les solutions de $(\bigstar)$ continues en au moins un point.
3) Déterminer les solutions de $(\bigstar)$ bornées sur au moins un intervalle.
4) Montrer que $(\bigstar)$ admet des solutions discontinues (en construire une à partir d'une $\mathbb{Q}$-base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$). Montrer que le graphe d'une telle solution est dense dans $\mathbb{R}^2$.

3. Topologie dans les espaces de matrices.

Exercice 17. *(☕) 1) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$.*

2) Dans $M_n(\mathbb{R})$ montrer que l'adhérence des matrices diagonalisables $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices triangularisables.

3) Soit $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$; montrer que l'intérieur de $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ des matrices admettant n valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ et $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$.

4) Montrer que l'application $\psi\ :\ M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_n[x]$ qui à $A \in M_n(\mathbb{C})$ associe $\psi(A) := P_A$ son polynôme caractéristique est continue et en déduire avec (3) une nouvelle démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

5) Montrer que l'application $\varphi\ :\ M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_n[x]$ qui à $A \in M_n(\mathbb{C})$ associe $\varphi(A) := \pi_A$ son polynôme minimal, n'est pas continue, (prendre $A = I_n$ et utiliser la densité de $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$).

Exercice 18. *Soit $P \in \mathbb{C}[x]$, un polynôme non constant. L'objectif est de déterminer les points isolés de $\mathscr{E} := \{\, A \in M_n(\mathbb{C})\ :\ P(A) = 0 \,\}$*

1) Soit $A \in \mathrm{Iso}(\mathscr{E})$, montrer qu'il existe un voisinage V de l'origine dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que $(I_n+H)A(I_n+H)^{-1} = A$ pour tout $H \in V$.

2) Montrer que $AM = MA$ pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, en déduire que $A = \lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

3) Soit λ une racine de P de multiplicité supérieure ou égale à 2 ; à l'aide des matrices $M_k = \lambda I_n + k^{-1}E_{12}$, montrer que $\lambda I_n \notin \mathrm{Iso}(\mathscr{E})$.

4) Montrer que $\mathrm{Iso}(\mathscr{E})$ est l'ensemble des matrices scalaires λI_n où λ est racine de P de multiplicité 1.

Exercice 19. *(☕) Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes dans $M_n(\mathbb{C})$.*

1) Montrer que $\mathscr{N}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$.

2) Quel est son intérieur (plusieurs démonstrations) ?

3) Si $n \geq 2$, montrer que $\mathscr{N}$ est sans points isolés.

4) Montrer que l'enveloppe convexe de $\mathscr{N}$ est l'ensemble des matrices de trace nulle (vous pourrez utiliser le résultat suivant « toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice à coefficients diagonaux nuls » en essayant de le démontrer).

Exercice 20. *(☕) Soit $A \in M_n(\mathbb{C}^n)$ et $\mathscr{S}_A = \{\, P^{-1}AP\,;\, P \in GL_n(\mathbb{C}) \,\}$.*

1) Montrer que A est nilpotente si et seulement si $0 \in \overline{\mathscr{S}_A}$.

2) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathscr{S}_A$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{C})$.

3) Montrer que $\mathscr{S}_A$ est toujours d'intérieur vide et est bornée si et seulement si $A \neq \lambda I_n$.

Exercice 21. *1) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ (même conclusion dans $GL_n(\mathbb{C})$ pour le groupe unitaire $U_n(\mathbb{C})$).*

2) Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive. Si de plus $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et la décomposition est unique. Montrer qu'alors la bijection ainsi définie entre $GL_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme topologique.

3) Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, montrer que les valeurs propres des éléments de G sont de module 1. Si $O_n(\mathbb{R}) < G$ et $GL_n(\mathbb{R})$ montrer qu'alors $G = GL_n(\mathbb{R})$ (i.e.$O_n(\mathbb{R})$ est maximal, on pourra utiliser l'exercice précédent).

4) Montrer que si Γ est une partie de $GL_n(\mathbb{C})$ compacte, non vide et stable par produit alors Γ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

Références

[1] Boas R.P. *« A Primer of Real Functions »*, M.A.A. Carus Mathematical Monographs 13 (1996).

[2] C.Costara & D. Popa *« Exercices in Functional Analysis »*, Kluwer A.C. (2003).

[3] S.Francinou H.Gianella & S. Nicolas *« Exercices de Mathématiques, oraux X-ENS, Analyse 1 »*, Cassini (2001).

[4] C.Grunspan & E.Lanzmann *« L'oral de mathématiques aux concours : Algèbre »*, Vuibert supérieur (1994).

[5] W.J.Kaczor & M.T.Nowak *« Problems in Mathematical Analysis : (II) Continuity and Differentiation »*, A.M.S. (Student Mathematical Library) (2001) (une traduction francaise viens de paraitre chez EDP Science...indispensable...).

[6] A.Rajwade & A. Bhandari *« Surprises ans Counterexamples in Real Function Theory »* Hindustan Book Agency, Texts ans Readings in Mathematics 42, (2007).

[7] J.E.Rombaldi *« Analyse matricielle : cours et exercices résolus »*, EDP Sciences (1999).

[8] J.E.Rombaldi *« Thèmes pour l'agrégation de mathématiques »*, EDP Sciences (1999).

[9] R.M.S. *« La revue de la filière mathématiques », indispensable pour l'agrégation interne, sujets (corrigés) nombreux exercies d'oraux, petits articles... et ceci pour seulement 69 euros... abonnez vous !*, www.rms-math.com

[10] P.Tauvel *« Exercices de d'algèbre linéaire »*, Dunod (2004).

---

7 juin 2010 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html   Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr