Exercice 1. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on pose* $a_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}$.

(1) *Montrer successivement que* $(a_n)_n$ *est décroissante, convergente de limite nulle.*

(2) *Montrer que pour* $n \geq 2$: $a_n \geq \frac{1-2^{1-n}}{n-1}$. *Quelle est la nature de la série* $\sum_n a_n$?

(3) *Montrer que pour* $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 2^{-n} + 4n(a_n - a_{n+1})$. *Quelle est la nature de la série* $\sum_n a_n/n$?

Exercice 2. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *la suite définie par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$, $(n \in \mathbb{N})$. *On pose aussi* $p_n = u_1 u_2 \dots u_n$.

(1) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *on a* $2u_n = \sqrt{2\sqrt{2+\dots\sqrt{2}}}$ *(n racines).*

(2) *Montrer que tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *on a* $\cos(\pi/2^{n+1}) = 2u_n$.

(3) *En déduite (à l'aide de la formule* $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$*) que* $\lim_n p_n = \frac{2}{\pi}$.

Exercice 3. *Existe-t-il* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *deux fois continuement dérivable et telle que* $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ *converge et* $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ *diverge ? (Indic : utiliser la formule de Taylor)*

Exercice 4. *Préciser selon les valeurs de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la nature (divergence, convergence, convergence absolue) de la série de terme général* $a_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}$. *Chercher un équivalent du module de la suite de terme général* $v_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ *; tends-elle en module vers zéro en décroissant ?*

Exercice 5. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\log n)}{n}$ *diverge. (Indic : estimer la somme sur des blocs ou les cosinus est* $\geq \sqrt{2}/2$*...).*

Exercice 6. *Utiliser le théorème des accroissements finis pour établir la divergence de la série de terme général* $1/k\log(k)\log(\log(k))$. *Estimer* $\sum_{m\leq k\leq n} 1/k\log(k)\log(\log(k))$, *observation ?*

Exercice 7. *On considère une ligne brisée dont les longueurs* $L_1, L_2, \dots L_n, \dots$ *des segments successifs* $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ *valent respectivement* $1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$. *Soit* $\theta \in [0, 2\pi[$, *on suppose en outre que chaque segment fait avec le précédent un angle* θ. *Déterminer la distance et l'angle entre l'extrémité initiale et finale (lorsqu'elle existe...) de cette ligne brisée.*

11 juin 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page Ouèbe : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr