Exercice 1. *(☕) Montrer que* $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\sin(x)}dx > \pi e^{\pi/2}$.

Exercice 2. *1)* ***(irrationalité de*** π***)*** *On suppose que* $\pi = p/q \in \mathbb{Q}$ *et on pose* $I_n = \int_0^{\pi} [x(p-qx)]^n\,dx$. *Montrer que* $I_0 = 2,\ I_1 = 4q,\ I_n = 2n(2n-1)qI_{n-1} - n(n-1)p^2 I_{n-2}$ *; en déduire que* $I_n \equiv 0(n!)$ *puis, que* $\lim_n I_n/n! = 0$. *Enfin, conclure que* $\pi \notin \mathbb{Q}$.
2) ***(irrationalité de*** e***)*** *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on pose* $I_n = \int_0^{\infty} x^n e^x dx$, *montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *il existe* $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ *tels que* $I_n = a_n + eb_n$. *On suppose qu'il existe* $p, q \in \mathbb{N}^\star$ *tels que* $e = p/q$, *montrer que* $I_n \geq q^{-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *et en déduire que* $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3. $C(\alpha)$ *désignant le coefficient de* x^{2010} *dans le développement en série entière de* $(1+x)^\alpha$, *calculer*

$$\int_0^1 C(-t-1)\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}+\cdots+\frac{1}{t+2010}\right)dt.$$

Exercice 4. *Préciser la nature (convergence, convergence absolue, divergence...) des intégrales impropres :*

1) $\displaystyle I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt,\quad J_\alpha = \int_2^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha + \sin(t)}dt,\ 0<\alpha<2.$

2) $\displaystyle \int_b^{\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right)dx,\ (a,b)\in\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}_+^\star.$

3) $\displaystyle \int_1^{\infty}\frac{\left(\cos(x^{-1})\right)^x - 1}{x^\alpha}dx,\ \alpha\in\mathbb{R},\quad \int_0^{\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+2}\right)dx,\quad \int_2^{\infty}\frac{x^{\log(x)}}{\log^x(x)}dx,\quad \int_0^{\infty}\cos(x^2)dx.$

Exercice 5. *Montrer que si* f *est continue sur* $[a,b]$, *alors* $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$. *Si de plus* f *est sans zéros dans* $[a,b]$ *déterminer les limites suivantes*

$$\lim_{p\to 0}\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}\quad \&\quad \lim_{p\to-\infty}\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Exercice 6. *(Autour du théorème des moments de Hausdorff)*

1) Soit $f \in C([a,b])$ *telle que* $\int_a^b f(t)t^n dt = 0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}$, *montrer que* f *est identiquement nulle.*

2) Si $f(x) = e^{-x^{1/4}}\sin(x^{1/4})$, *montrer que* $I_n := \int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t}dt = \frac{n!}{\omega^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}$ *où* $\omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$. *En déduire que*

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = 0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

(pour cela, remarquer que $I_{4n+3}\in\mathbb{R}$*...).*

Exercice 7. *Etudier la suite de terme général* $\displaystyle u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^2}$.

Exercice 8. *Converge et calcul de* $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2011(t+t^{-1})}\frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Exercice 9. *Soit* $f\ :\ [0,1]\mapsto\mathbb{R}$ *continue, dérivable à l'origine et telle que* $f(0)=f'(0)=0$. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^{-3/2}dt$ *converge.*

Exercice 10. *Convergence et convergence absolue de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(t^3-t)dt$.

25 juin 2010 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr