Séries de Fourier – Vendredi 24 novembre 2011.

Exercice 1. ***(quatre petits exercices sur les séries de Fourier).*** *0) Existe-t'il $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ non nulle dont tous les coefficients de Fourier soient nuls ?*

1) Soient $f, g \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et posons $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)c_n(g)e^{inx}$. Montrer que h est bien définie, $h \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et est développable en série de fourier.

2) Existe-t'il $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier soit $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$?

3) Montrer que $f(x) = \sin^3(x)$ est développable en série de fourier et préciser ce développement.

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique égale à $\sqrt{x}$ sur $[0, \pi]$.*

(1) *Y a-t-il dans le cours un théorème permettant d'affirmer que f est développable en série de Fourier ?*
(2) *Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$, montrer que pour tout $x > 0$ $G(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt$.*
(3) *En déduire que la limite $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ existe, est finie et strictement positive.*
(4) *Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$. à l'aide de la question précédente montrer que $a_n = 0(n^{-3/2})$.*
(5) *Montrer que f est développable en série de Fourier.*

Exercice 3. *A l'aide de la fonction $f(t) = \exp(e^{it})$ montrer que $\int_0^{2\pi} e^{2\cos(\theta)}d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!^2}$.*

Exercice 4. *Soit $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, montrer que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$ et*

$$\left| f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Exercice 5. *Développer en série de Fourier la fonction $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}$.*

Exercice 6. *Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. Avec les séries de Fourier, montrer que $\|f\|_\infty \leq \dfrac{\|f''\|_2}{3\sqrt{5}}$.*

Exercice 7. *Utiliser les séries de Fourier pour évaluer l'intégrale*

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos(\cos(x)) ch(\sin(x)) \cos(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 8. *[Preuve du théorème des moments de Hausdorff par les séries de Fourier]. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0, \pi])$ telle que $\int_0^{2\pi} t^n f(t)dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{int}f(t)dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ et en déduire que $f \equiv 0$.*

Exercice 9. *Soit $f \in \mathscr{C}^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$ et $\int_0^{\pi} f'^2(t)dt = 1$. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_1^{\infty}$ de réels vérifiant $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}\sin(nx)$, et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \dfrac{2}{\pi}$.*

15 novembre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mél : lassere@math.ups-tlse.fr

Voici quelques exercices supplémentaires pour bien profiter de ce mois de novembre....

Exercice 10. *On considère la suite* $(u_n)_n$ *définie par* $u_0 = 5$ *et* $u_{n+1} = u_n + 1/u_n$. *Montrer (à la main) que* $45 < u_{1000} < 45,1$.

Exercice 11. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable en* $x = a$ *avec* $f'(a) > 0$. *existe-t-il un voisinage de* a *sur lequel* f *est strictement croissante ?*

Exercice 12. *Est-il possible de placer dans le disque unité deux carrés de coté de même longueur égale à 0.9 sans qu'ils se chevauchent ?*

15 novembre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mél : lassere@math.ups-tlse.fr