1. PREMIER PROBLEME

Lucas et Julia jouent à un jeu : pour jouer une partie de ce jeu ils tirent aléatoirement un entier n strictement positif suivant une certaine loi de probabilité

– si cet entier n est impair alors Lucas gagne et Julia donne à Lucas n euros, on considère alors que le gain de Lucas est $+n$.

– si n est pair Julia gagne et Lucas donne alors n euros à Julia, on considère alors que le gain de Lucas est $-n$.

On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre tiré aléatoirement et par $g(n)$ le gain de Lucas lorsque $X = n$.

(1) Préliminaires.

(a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$:
$$1 - x + x^2 + \cdots + (-x)^{n-1} - \frac{1}{1+x} = -\frac{(-x)^n}{1+x}$$

(c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} - \log(1+x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\displaystyle\left| \log(2) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

(e) En déduire que $\displaystyle\log(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

(2) Dans toute cette question la loi de probabilité de X est donnée par $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, où λ est une constante réelle.

(a) Calculer λ.

(b) Expliciter $g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

(c) Quelle est la probabilité que Lucas gagne une partie ?

(d) Montrer que $\sum_{n \geq 1} g(n) \cdot P(X = n) = 1 - \log(2)$.

(e) Que représente la série précédente ?

(f) Lucas et Julia font deux parties successives. On désigne par Y la variable aléatoire représentant le gain cumulé de Lucas à l'issue de ces deux parties.

(i) Déterminer $P(Y = 0)$.

(ii) Déterminer $P(Y = 1)$.

(iii) Expliciter toutes les issues possibles des deux jeux si $Y = 2$.

(iv) Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2k(2k+1)^2(2k+2)} = \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right)\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right)$

(v) On rappelle que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$ calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(vi) Déduire de tout ce qui précède que $P(Y = 2) = \frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{4}$.

(3) On suppose maintenant que la loi de probabilité de X est donnée par $P(X = n) = \dfrac{\mu}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, où μ est une constante réelle.

(a) Calculer μ.

(b) Quelle est la probabilité que Lucas gagne une partie ?

(c) Nature et somme de la série $\sum_{n \geq 1} g(n) \cdot P(X = n)$.

(d) Lucas et Julia font, comme dans la question 2-f deux parties successives. On désigne à nouveau par Y la variable aléatoire représentant le gain cumulé de Lucas à l'issue de ces deux parties.

(i) Que vaut la probabilité de l'événement $Y \geq 0$?

(ii) Sachant que $Y \geq 0$ quelle est la probabilité que Lucas ait gagné les deux parties ?

2. SECOND PROBLEME

L'objet de ce problème est d'utiliser les séries numériques pour obtenir des approximations de π.

(1) Pour $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$.

(a) Etudier suivant les valeurs de t la nature (convergente ou divergente) de la **suite** $(u_n)_{n\geq 0}$; dans le cas de la convergence, préciser la limite.

(b) Pour quels réels $t \in \mathbb{R}_+$ la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle décroissante ?

(c) Préciser la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}_+$.

(d) Préciser la nature de la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}_+$.

(e) Pour quels réels $t \in \mathbb{R}_+$ la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ converge-t-elle absolument ?

(f) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$.

(g) Montrer que que pour tout $t \in [0,1]$: $\arctan(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$.

(h) Déduire de ce qui précède et comme dans le problème précédent que $\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

(i) Combien faut-il calculer de termes dans la série précédente pour obtenir une estimation de π à 10^{-3} prés ?

(2) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ on considère maintenant les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, on admettra (voir la fin du problème) que $\displaystyle\pi = 6 \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$. ($\bigstar$) et on posera

$$v_n := \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1},\ R_n = 6 \sum_{k\geq n+1} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}},\ R'_n = 6 \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{2^{2k+1}}.$$

(a) Pour $t > 0$ écrire plus simplement $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

(b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (pour $t = 1$ vous pouvez utiliser la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).

(c) Montrer que pour $0 < t < 1$ la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

(d) En déduire que $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) Justifier la convergence de la série plus haut définissant π ainsi que les deux restes R_n et R'_n.

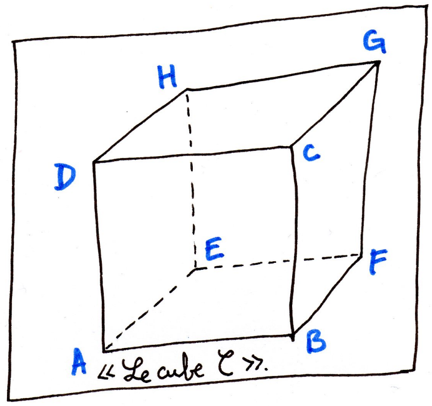
(f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $0 \leq R_n \leq R'_n$.

(g) En déduire le nombre de termes a calculer dans la série ($\bigstar$) pour obtenir une estimation de π à 10^{-3} prés. Donner cette estimation sous la forme d'une fraction.

(3) Terminons en montrant la formule ($\bigstar$) : faire $x = 1/2$ dans le développement en série entière de arcsin valable sur $]-1,1[$: $\displaystyle\arcsin(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

3. TROISIEME PROBLEME

Un point se déplace aléatoirement d'un sommet d'un cube $\mathscr{C}$ à un autre. A chaque station, il choisit la station suivante parmi les trois sommets adjacents au sommet où il se trouve. Le choix s'effectue de façon équiprobable et indépendante du trajet déjà effectué.



(1) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer le nombre T_n de trajets possibles en $2n$ étapes (on rappelle que le point part de A).

(2) Soit $n \geq 3$, montrer qu'à la n-ième station le point se trouvera sur les sommets A, C, F, H si n est pair et D, B, E, G si n est impair.

(3) On note S_n le nombre de trajets en $2n$ étapes tels que le point se retrouve en A à l'issue de la $2n$-ième étape. Par convention, $S_0 = 1$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{n+1} = S_n + 2 \cdot 3^{2n}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 1 + \dfrac{3^{2n} - 1}{4}$.

(4) Quelle est la probabilité pour que le point soit en A à l'issue de la $2n$-ième étape ?

(5) Quelle est la probabilité pour que le point ne soit jamais[1] repassé en A à l'issue de la $2n$-ième étape ? En déduire le nombre de tels chemins.

(6) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la probabilité p_n pour que le premier retour en A s'effectue à l'issue de la $2n$-ième étape.

(7) Que vaut $\lim_{n \to +\infty} (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$? Interprétation ?

17 juin 2011 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr

1. Vous pouvez appliquer (après l'avoir démontrée) la formules des probabilités composées : si $P\big(\cap_{1 \leq k \leq n} V_k\big) > 0$ alors $P\big(\cap_{1 \leq k \leq n} V_k\big) = P(V_1) \cdot P(V_2 / V_1) \ldots P(V_n / V_1 \cap \cdots \cap V_{n-1})$.