Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Calculs préliminaires.

Notons que si $f \in H$ alors $x \longmapsto f(x)e^{-x^2/2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue positive et majorée par $\dfrac{1}{\rho}e^{-\rho x^2}$ pour tout réel x donc par $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $\pm\infty$.

1. Compte-tenu de la remarque précédente, F_f est bien définie sur $\mathbb{R}$. En outre comme $u \longmapsto f(u)e^{-u^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, F_f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F_f'(x) = f(x)e^{-x^2/2} > 0$ pour tout réel x. Il en découle par le théorème de caractérisation des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes d'intervalles que :
F_f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{x\to-\infty} F_f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F_f(x)[=]0, \sqrt{2\pi}[$. $\square$

2. φ convient si et seulement si $F_f \circ \varphi = F_1$ ce qui prouve l'existence d'une unique solution : $\varphi = F_f^{-1} \circ F_1$. $\square$

3. F_f^{-1} est un $\mathcal{C}^1$-difféomrphisme croissant de $]0, \sqrt{2\pi}[$ sur $\mathbb{R}$ et ainsi par composition de difféorphismes, φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur lui-même. $\square$

4. Comme φ est dérivable et que les fonctions intégrées dans la relation de définition de φ sont continues, il vient en dérivant cette relation que : $\Big(f\big(\varphi(x)\big)e^{-\varphi(x)^2/2}\Big)\varphi'(x) = e^{-x^2/2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$
Or comme toutes les fonctions intervenant ici sont strictement positives, il vient en prenant le logarithme que : $\ln\big(\varphi'(x)\big) + \ln\big(f\big(\varphi(x)\big)\big) - \dfrac{1}{2}\varphi(x)^2 = -\dfrac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2).$ $\square$

En appliquant cette égalité en $\varphi^{-1}(x)$ on obtient : $\ln\big((\varphi^{-1})'(x)\big) - \ln\big(f(x)\big) - \dfrac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2 = -\dfrac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (3). $\square$

5. On sait qu'un changement de variable qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme transforme une intégrale impropre convergente en une intégrale convergente et de valeur égale.
En effectuant de changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|f(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u$ on obtient donc une intégrale convergente (et égale). Or, compte-tenu de la relation (1), l'intégrale convergente obtenue est $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big|h\big(\varphi(u)\big)\big|e^{-u/2}\,\mathrm{d}\,u$ ce qui signifie que $h\big(\varphi(u)\big)e^{-u/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Enfin le même théorème de changement de variable dans les intégrales impropres utilisé cette fois ci sans valeur absolue fournit l'égalité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \int_{-\infty}^{+\infty} h\big(\varphi(u)\big)e^{-u/2}\,\mathrm{d}\,u.$ $\square$

6. Comme φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, φ^2 est croissante sur $]\varphi^{-1}(0), +\infty[$ et décroissante sinon. Par ailleurs $u \longmapsto e^{-u^2/2}$ croît sur $\mathbb{R}^-$ et décroît sur $\mathbb{R}^+$. Il en découle immédiatement que :
$\displaystyle\int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u \geqslant \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2} \qquad \forall x \geqslant A = \max(\varphi^{-1}(0), 0).$ $\square$

Notons qu'il en résulte également que $\displaystyle\int_{x-1}^{x} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u \geqslant \varphi^2(x)e^{-(x-1)^2/2} \qquad \forall x \leqslant A' = \min(\varphi^{-1}(0), 0).$

7. Comme $f \in H_0 \subset H$ on a $0 \leqslant u^2 f(u)e^{-u^2/2} \leqslant \dfrac{1}{\rho}u^2 e^{-\rho u^2}$ pour tout u ce qui prouve que $u^2 f(u)e^{-u^2/2} = o\big(\dfrac{1}{u^2}\big)$ au voisinage de $\pm\infty$ et est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut ainsi choisir la fonction $h = u \longmapsto u^2$ dans la question 5. ce qui prouve que $\varphi^2(u)e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :
$\displaystyle\int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u \leqslant 1$ pour $x \geqslant C$ et $\displaystyle\int_{x-1}^{x} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u \leqslant 1$ pour $x \leqslant -C$.
Il résulte alors de la question précédente que :
$\varphi^2(x) \leqslant e^{(x+1)^2/2} = e^{(|x|+1)^2/2}$ pour $x \geqslant \max(A, C)$
et
$\varphi^2(x) \leqslant e^{(x-1)^2/2} = e^{(|x|+1)^2/2}$ pour $x \leqslant \inf(A', -C)$.

Ainsi $|\varphi(x)| \leqslant e^{(|x|+1)^2/4}$ pour tout réel x tel que $|x| \geqslant B = \max(A, -A', C)$. $\square$

8. On cherche naturellement une primitive sous la forme $g(u)e^{-u/2}$. Il vient que g convient si et seulement si : $-ug(u)+g'(u)=-u\big(u-\varphi(u)\big)+1-\varphi'(u)$. Donc $g(u)=u-\varphi(u)$ convient.

Une primitive de $\big(u\varphi(u)-u^2-\varphi'(u)+1\big)e^{-u^2/2}$ est $\big(u-\varphi(u)\big)e^{-u^2/2}$. $\square$

9. Notons $h(u)$ la fonction à intégrer.

Il découle clairement de la question précédente et de la majoration de la question 7. que $\displaystyle\int_a^b h(u)\,\mathrm{d}\,u$ tend vers 0 lorsque $(a,b)\to(-\infty,+\infty)$.
Compte-tenu de l'avertissement liminaire de l'énoncé, il reste à prouver que h est intégrable sur $\mathbb{R}$ avant de conclure que $I=0$.

Or, toujours compte-tenu de la majoration de la question 7. : $\big(u\varphi(u)-u^2+1\big)e^{-u^2/2}=o\big(\dfrac{1}{u^2}\big)$ en $\pm\infty$ qui est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

Il en découle que $\displaystyle\int_a^b \varphi'(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u$ admet une limite lorsque (a,b) tend vers $(-\infty,+\infty)$. Ce qui prouve que $\varphi'(u)e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque cette fonction est positive.
Ainsi h est bien intégrable en tant que somme de deux fonctions intégrables et $I=0$. $\square$

Une inégalité intéressante.

10.• Pour $x\in]0,1]$ une étude des variations de $x\longmapsto x\ln x$ prouve immédiatement que $|x\ln x|\leqslant\dfrac{1}{e}$.

Par ailleurs pour u tel que $f(u)\geqslant 1$ on a $0\leqslant f(u)\ln\big(f(u)\big)\leqslant f(u)\big(-\ln\rho+(\frac{1}{2}-\rho)u^2\big)$.

Donc pour tout réel u on a :
$$\Big|f(u)\ln\big(f(u)\big)e^{-u^2/2}\Big|\leqslant\Big(\frac{1}{e}+f(u)\big|-\ln\rho+(\frac{1}{2}-\rho)u^2\big|\Big)e^{-u^2/2}\leqslant\frac{1}{e}e^{-u^2/2}+\frac{1}{\rho}\big|-\ln\rho+(\frac{1}{2}-\rho)u^2\big|e^{-\rho u^2}\underset{\text{DEF}}{=}M(u).$$
Or $M(u)=o\big(\dfrac{1}{u^2}\big)$ au voisinage de $\pm\infty$ ce qui prouve que $f(u)\ln\big(f(u)\big)e^{-u^2/2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$. $\square$

- On a noté au début de la question 7. que $\varphi^2(u)e^{-u\mathcal{C}c2/2}$ est intégrable.

De même $u^2e^{-u^2/2}=o\big(\dfrac{1}{u^2}\big)$ ainsi que $u\varphi(u)e^{-u^2/2}$ qui est un $o\big(\dfrac{1}{u^2}\big)$ d'après la question 7.

Il en découle que $|u-\varphi(u)|^2e^{-u^2/2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$. $\square$

11. Le fait que $\ln\big(f(u)\big)f(u)e^{-u^2/2}$ soit intégrable prouve par la question 5. que $\ln\Big(f\big(\varphi(u)\big)\Big)e^{-u^2/2}$ l'est et que :
$E(f)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\Big(f\big(\varphi(u)\big)\Big)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u.$ $\square$

12. Il en découle que $E(f)-\Phi(f)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\ln\big(f\big(\varphi(u)\big)\big)-\frac{1}{2}u^2+u\varphi(u)-\frac{1}{2}\varphi^2(u)\Big)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u.$

Or d'après la question 4. on a $\ln\big(f\big(\varphi(u)\big)\big)-\dfrac{1}{2}\varphi^2(u)=-\ln\big(\varphi'(u)\big)-\dfrac{1}{2}u^2.$

Ainsi $E(f)-\Phi(f)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(-u^2+u\varphi(u)-\ln\big(\varphi'(u)\big)\Big)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u.$

D'après une remarque de la question 10., $\Big(u\varphi(u)-u^2\Big)e^{-u^2/2}$ est intégrable. On peut donc linéariser l'intégrale précédente et l'intégrale nulle de la question 9. ce qui prouve que :
$$\begin{aligned}E(f)-\Phi(f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(-u^2+u\varphi(u)\Big)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u-\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\big(\varphi'(u)\big)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\varphi'(u)-1\Big)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u-\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\big(\varphi'(u)\big)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\varphi'(u)-1-\ln\big(\varphi'(u)\big)\Big)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u.\quad\square\end{aligned}$$

13. Par concavité de la fonction ln on a $\ln x\leqslant x-1$ pour tout $x>0$. Il en découle par positivité de l'intégration que $\Phi(f)\leqslant E(f)$ pour toute fonction f de H_0. $\square$

14.• En outre par théorème de positivité stricte de l'intégration pour les fonctions continues, il vient que $E(f)=\Phi(f)$ si et seulement si $\ln\big(\varphi'(u)\big)=\varphi'(u)-1$ pour tout réel u soit si et seulement si $\varphi'(u)=1$ pour tout réel u soit si et seulement si $\varphi(u)=u+C$ pour tout réel u.

- La question 4. donne alors que $f(u+C)=e^{Cu-C^2/2}$ donc que $f(u)=e^{Cu-C^2/2}$ pour tout réel u.

- Réciproquement soit f une fonction de cette forme. Pour montrer qu'elle convient il faut prouver qu'elle appartient bien à H_0 et que $E(f) = \Phi(f)$. Il suffit en fait de prouver qu'elle appartient à H_0 car alors la relation 4. montre que $\varphi'(u) = 1$ pour tout u donc que $E(f) = \Phi(f)$ d'après l'équivalence établie au début de cette question.

- - Déjà on a bien f continue et $0 < f(x)$ pour tout x.
- - En outre $f(x) \leqslant \dfrac{1}{\rho} e^{(1/2-\rho)x^2}$ si et seulement si $\big(\dfrac{1}{2} - \rho\big)x^2 - Cx + \dfrac{C^2}{2} - \ln\rho \geqslant 0$ pour tout x.

Or $\Delta = C^2 - 4\big(\dfrac{1}{2} - \rho\big)\big(\dfrac{C^2}{2} - \ln\rho\big)$ tend vers $-\infty$ lorsque $\rho \to 0^+$ donc est négatif pour $0 < \rho \leqslant \alpha$ où α est un réel positif dépendant de C.

Il en résulte que le trinôme $\big(\dfrac{1}{2} - \rho\big)x^2 - Cx + \dfrac{C^2}{2} - \ln\rho$ est bien positif ou nul pour tout réel x si l'on choisit $\rho \leqslant \inf(\alpha, \dfrac{1}{2})$ ce qui prouve que f appartient bien à H.

- - Par ailleurs $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-C)^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2}\,\mathrm{d}\,v = \sqrt{2\pi}.$

En conclusion les fonctions f de H_0 telles que $E(f) = \Phi(f)$ sont toutes les fonctions de la forme $f(x) = e^{Cx - C^2/2}$. $\square$

Extension aux fonctions positives.

15. L'énoncé qui manquait déjà de rigueur à plusieurs reprises précédemment commence à atteindre des sommets en la matière.

- La première chose qu'il convient d'établir ici est que $f_n \in H_0$.

Déjà f_n est strictement positive et continue et en outre, vu que par hypothèse $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \sqrt{2\pi}$ il vient que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \frac{n-1}{n}\sqrt{2\pi} + \frac{1}{n}\sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}.$

Reste à établir que $f_n \in H$ c'est à dire l'existence, pour tout n, d'un entier $\rho_n > 0$ tel que ...

Or la fonction constante égale à 1 appartient clairement à H comme on le voit en choisissant $\rho = \dfrac{1}{2}$. Notons ρ_0 un réel positif convenant pour la fonction g (il existe par hypothèse).

En remarquant que, pour tout réel x fixé, la fonction $\rho \longmapsto \dfrac{1}{\rho}\exp\Big(\big(\dfrac{1}{2} - \rho\big)x^2\Big)$ est clairement décroissante, il vient que $\rho = \min(\dfrac{1}{2}, \rho_0)$ convient à la fois pour la fonction g et la fonction constante égale à 1 donc aussi pour la fonction f_n et cela pour tout entier n.

En conclusion les fonctions f_n appartiennent bien à H_0. $\square$

- Les fonctions $\psi\big(f_n(u)\big)e^{-u^2/2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et convergent simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\psi\big(g(u)\big)e^{-u^2/2}$ elle aussi continue sur $\mathbb{R}$.

En outre on a $\psi\big(f_n(u)\big)e^{-u^2/2} \leqslant M(u)$, la fonction M étant définie à la question 10. (ρ ayant la valeur définie ci-dessus). Or comme déjà noté cette fonction est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de la convergence dominée prouve alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi\big(f_n(u)\big)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\big(g(u)\big)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u.$

Ainsi $E(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(g)$. $\square$

16. Commençons par remarquer que comme f_n appartient à H_0 (voir ci-dessus) on peut bien envisager la fonction φ_n. Soit x un réel quelconque fixé dans la suite et $\ell(x)$ une valeur d'adhérence de la suite $\big(\varphi_n(x)\big)$ de sorte qu'il existe une application α strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $\big(\varphi_{\alpha(n)}(x)\big)$ converge vers $\ell(x)$.

Pour tout n on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi_{\alpha(n)}(x)} f_{\alpha(n)}e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u$ ce qui s'écrit :

$$\frac{\alpha(n)-1}{\alpha(n)}\int_{-\infty}^{\varphi_{\alpha(n)}(x)} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u + \frac{1}{\alpha(n)}\int_{-\infty}^{\varphi_{\alpha(n)}(x)} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u \qquad (1)$$

Or lorsque $n \to +\infty$ on a $\alpha(n) \geqslant n \to +\infty$ et donc $\dfrac{\alpha(n)-1}{\alpha(n)} \to 1$ et $\dfrac{1}{\alpha(n)} \to 0$.

Par ailleurs $\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi_{\alpha(n)}(x)} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u \to \int_{-\infty}^{\ell(x)} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u$ car une intégrale fonction de sa borne supérieure est continue. De même $\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi_{\alpha(n)}(x)} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u \to \int_{-\infty}^{\ell(x)} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u.$

En passant à la limite dans (1) on obtient alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{\ell(x)} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u$.

Cette relation est vraie pour tout réel x et toute valeur d'adhérence $\ell(x)$ de la suite $\big(\varphi_n(x)\big)$ (et en particulier pour la limite inférieure et la limite supérieure ce qui fournit la relation (2) demandée). $\square$

REMARQUE : Cette relation (2) prouve que les fonctions ψ_j sont à valeurs finies.

En effet si $\psi_j(x) = -\infty$ il vient $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = 0$ ce qui est absurde.

De même si $\psi_j(x) = +\infty$ il vient $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \sqrt{2\pi}$ donc $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = 0$ ce qui est également absurde. $\square$

17.• Si $x_1 < x_2$ la relation (2) ci-dessus fournit $\displaystyle\int_{\psi_j(x_1)}^{\psi_j(x_2)} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \int_{x_1}^{x_2} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u > 0$ par théorème de positivité stricte de l'intégration des fonctions continues et donc $\psi_j(x_1) < \psi_j(x_2)$ (par l'absurde car $g(u)e^{-u^2/2} \geqslant 0$). Ainsi les fonctions ψ_j sont strictement croissantes. $\square$

REMARQUE : La démonstration ci-dessus prouve d'une manière plus générale que si $x_1 < x_2$ alors $\psi_i(x_1) < \psi_j(x_2)$ pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$.

• Comme ψ_j est croissante, elle admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $-\infty$. En passant à la limite lorsque $x \to -\infty$ dans la relation (2) de la question 16, il vient $\displaystyle\int_{-\infty}^{\ell} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = 0$. Le théorème de positivité stricte de l'intégration des fonctions continues montre alors que $g(u) = 0$ pour $u \leqslant \ell$. Il en découle que $\ell \leqslant a$.

Supposons que $\ell < a$. Il existe alors $A > 0$ tel que $\ell \leqslant \psi_j(x) < a$ pour $x \leqslant -A$. La relation (2) de la question 16 écrite en $-A$ fournit alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{-A} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = 0$ ce qui est absurde. En conclusion $\ell = a$ i.e. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \psi_j(x) = a$.

On prouve de même que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi_j(x) = b$. $\square$

18 et 19. La question 18 est encore une fois très mal posée et ne permet de résoudre la question 19 (à savoir que D est dénombrable) que si a et b sont finis.
Ce qui est d'autant plus scandaleux que la notion d'ensemble dénombrable n'est plus au programme !
Une solution consiste à remarquer que comme ψ_1 est croissante, elle est discontinue en x si et seulement si $\psi_1(x^+) - \psi_1(x^-) > 0$. On peut alors trouver un rationnel $r(x) \in]\psi_1(x^-), \psi_1(x^+)[$.
Le théorème de la limite monotone montre que $\psi_1(x^+) < \psi_1(y) < \psi_1(z^-)$ si $x < y < z$ car ψ_1 est strictement monotone. Il en découle que l'application r est une injection de D dans $\mathbb{Q}$ ce qui prouve que D est dénombrable.

Cette technique est certes classique mais pas pour un élève de MP et d'ailleurs encore une fois fait intervenir des notions hors programme.

20. Si $\psi_1(x) < \psi_2(x)$ la relation (2) de la question 16 prouve que $\displaystyle\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = 0$ donc que g est nulle sur $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$ par le théorème de positivité stricte de l'intégration des fonctions continues. $\square$

21. Soit x un réel quelconque fixé.
En faisant tendre y vers x^- puis vers x^+ dans la relation (2) de la question 16 écrite en $\psi_1(y)$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\psi_1(x^-)} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = \int_{-\infty}^{\psi_1(x^+)} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u.$$

Ainsi $\displaystyle\int_{\psi_1(x^-)}^{\psi_1(x^+)} g(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u = 0$ pour tout réel x.
Comme $\psi_1(x) \in [\psi_1(x^-), \psi_1(x^+)]$ il découle du théorème de positivité stricte de l'intégration des fonctions continues que si $g\big(\psi_1(x)\big) > 0$ alors $\psi_1(x^-) = \psi_1(x^+)$ i.e. que ψ_1 est continue en x. $\square$

22. Compte-tenu de la remarque du début de la question 17, on a, pour tout x, la chaîne d'inégalités suivantes :

$$\psi_1(x - \frac{2}{n}) \leqslant \psi_2(x - \frac{1}{n}) \leqslant \psi_2(x + \frac{1}{n}) \leqslant \psi_1(x + \frac{2}{n}) \qquad (3).$$

En passant à la limite il vient que $\psi_1(x^-) \leqslant \psi_2(x^-) \leqslant \psi_2(x^+) \leqslant \psi_1(x^+)$.
Il en découle que si ψ_1 est continue en x alors $\psi_2(x^-) = \psi_2(x^+) = \psi_1(x)$ donc $\psi_2(x) = \psi_1(x)$ (car ψ_2 est croissante) et également que ψ_2 est donc continue en x.

En inversant les indices 1 et 2 dans la chaîne d'inégalités (3) on prouve en fait que :
Pour $i \neq j \in \{1, 2\}^2$ la fonction ψ_i est continue en x si et seulement si ψ_j l'est et alors $\psi_i(x) = \psi_j(x)$. $\square$

23. Comme ψ_1 est continue sur le compacr K elle y est uniformément continue et donc il existe $\alpha > 0$ tel que $|\psi_1(x) - \psi_1(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ dès que $x, y \in K$ et $|x-y| \leqslant \alpha$.

Nous avons évidemment $K \subset \bigcup\limits_{y \in K}]y-\alpha, y+\alpha[$ et par le théorème de Borel-Lebesgue (hors programme MP again !) on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini : $K \subset \bigcup\limits_{j=0}^{q}]y_j-\alpha, y_j+\alpha[\subset \bigcup\limits_{j=0}^{q} [y_j-\alpha, y_j+\alpha]$.

Or $K \bigcap [y_j-\alpha, y_j+\alpha]$ est un compact (fermé borné) donc admet un minimum x_{2j} et un maximum x_{2j+1} appartenant bien sûr tous deux à K et vérifiant $x_{2j} \leqslant x_{2j+1}$. Et naturellement $K \subset \bigcup\limits_{j=0}^{q} [x_{2j}, x_{2j+1}]$.

Au passage notons à nouveau une faute d'énoncé : on n'a pas forcément l'inégalité stricte $x_{2j} < x_{2j+1}$ comme on le voit en choisissant pour K un singleton !
En fait on a l'inégalité stricte si K ne comporte aucun point isolé car comme l'ensemble des discontinuités de ψ_1 est dénombrable, $K \bigcap [y_j-\alpha, y_j+\alpha]$ ne peut alors être réduit au seul point y_j.

Soient désormais u et v tels que $x_{2j} \leqslant u \leqslant v \leqslant x_{2j+1}$. Comme ψ_1 est croissante, il vient :
$\psi_1(v) - \psi_1(u) \leqslant \psi_1(x_{2j+1}) - \psi_1(x_{2j}) \leqslant \varepsilon$. $\square$

24. Si ψ_1 est continue en un réel x on a $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ d'après la question 22. En un tel point la suite $\big(\varphi_n(x)\big)$ admet donc une unique valeur d'adhérence $\psi_1(x)$ qui est finie comme on l'a noté en remarque de la question 16 et converge donc vers $\psi_1(x)$.
Ceci est en particulier réalisé en les points x_{2j} et x_{2j+1} pour j de 0 à q.
Soit alors $\varepsilon > 0$ donné quelconque.
Il existe N_ε tel que $|\varphi_n(x_k) - \psi_1(x_k)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ et tout k de 0 à $2q+1$.
Soit désormais $x \in K$ et $n \geqslant N_\varepsilon$. Il existe j tel que $x_{2j} \leqslant x \leqslant x_{2j+1}$. La croissance de φ_n fournit :
$|\varphi_n(x) - \psi_1(x)| \leqslant \max\big(|\varphi_n(x_{2j}) - \psi_1(x)|, |\varphi_n(x_{2j+1}) - \psi_1(x)|\big)$.
Or $|\varphi_n(x_{2j}) - \psi_1(x)| \leqslant |\varphi_n(x_{2j}) - \psi_1(x_{2j})| + |\psi_1(x_{2j}) - \psi_1(x)| \leqslant 2\varepsilon$ compte-tenu du choix de N_ε et de la question 23.
De même $|\varphi_n(x_{2j+1}) - \psi_1(x)| \leqslant 2\varepsilon$.
Ce qui prouve bien que la suite $\big(\varphi_n\big)$ converge uniformément sur K vers ψ_1. $\square$

25. Encore une faute d'énoncé ! Il faut lire que pour tout $A > 0$ il existe n tel que …
Soit $A > 0$ donné quelconque. Pour tout entier m et tout réel $u \in [-A, A]$ on a $\varphi_m(-A) \leqslant \varphi_m(u) \leqslant \varphi_m(A)$ par croissance de la fonction φ_m.
Comme $\psi_1(-A) = \liminf \varphi_m(-A)$ est fini (voir remarque de la question 16) l'ensemble des indices m tels que $\varphi_m(-A) \leqslant \psi_1(-A) - 1$ est fini sinon il existerait une suite extraite convergeant soit vers $-\infty$ soit vers $\ell \leqslant \psi_1(-A) - 1$ ce qui est contradictoire avec la définition de la limite inf.
Ainsi il existe un entier n_1 tel que $\psi_1(-A) - 1 \leqslant \varphi_m(-A)$ pour tout $m \geqslant n_1$.
On prouve de même qu'il existe n_2 tel que $\varphi_m(A) \leqslant \psi_1(A) + 1$ pour tout $m \geqslant n_2$.
Il en découle que $\psi_1(-A) - 1 \leqslant \varphi_m(u) \leqslant \psi_1(A) + 1$ pour tout $u \in [-A, A]$ et tout entier $m \geqslant N_A \underset{\text{DEF}}{=} \max(n_1, n_2)$.
Ainsi pour tout réel $A > 0$ il existe un entier N_A tel que $\sup\limits_{u \in [-A,A]} |\varphi_m(u)| \leqslant |\psi_1(-A)| + |\psi_1(A)| + 1$. $\square$

Notons $L(A) = |\psi_1(-A)| + |\psi_1(A)| + 1$. Il vient pour $m \geqslant N_A$ que $\sup\limits_{u \in [-A,A]} |u - \varphi_m(u)|^2 \leqslant L(A)^2$.

Par ailleurs la fonction $u \longmapsto u - \varphi_n(u)$ est continue donc bornée sur le compact $[-A, A]$ par un réel noté L_n.

Il en découle que, pour tout entier n, $\sup\limits_{u \in [-A,A]} |u - \varphi_m(u)|^2 \leqslant M(A)$ avec $M(A) \underset{\text{DEF}}{=} \max\big(L(A)^2, L_1^2, \ldots, L_{N(A)}^2\big)$. $\square$

26. On sort ici totalement (à nouveau !) du cadre du programme. D'une part $u - \psi_1(u)$ n'est pas continue par morceaux sur $[-A, A]$ car peut y admettre une infinité dénombrable de discontinuité et on intègre sur K qui est un fermé quelconque de $[-A, A]$! Il faut admettre ici que les propriétés classiques de l'intégrale sont encore vérifiées.

Dans la suite on note $F_n : u \longmapsto |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2}$ et $F : u \longmapsto |u - \psi_1(u)|^2 e^{-u^2/2}$.

K est une partie fermée de $[-A, A]$ donc compacte et incluse dans C. Il en découle d'après la question 24 que la suite (φ_n) converge uniformément vers ψ_1 sur K. Or pour $u \in K$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(u) - F_n(u)| &= |\psi_1(u) - \varphi_n(u)| \times |2u - \psi_1(u) - \varphi_n(u)| \times e^{-u^2/2} \\
&\leqslant |\psi_1(u) - \varphi_n(u)| \times \underbrace{\big(2A + 2|\psi_1(-A)| + 2|\psi_1(A)| + 1\big) \times 1}_{\textit{Constante}}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite (F_n) converge uniformément vers F sur K et donc $\displaystyle\int_K F_n(u)\,\mathrm{d}\,u \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_K F(u)\,\mathrm{d}\,u$.

En notant U l'ouvert $[-A,A]\setminus K$, pour conclure il <u>suffit</u> donc de prouver que, pour tout $\varepsilon>0$ donné, on a $\displaystyle\int_U F(u)\,\mathrm{d}\,u\leqslant\varepsilon$ et $\displaystyle\int_U F_n(u)\,\mathrm{d}\,u\leqslant\varepsilon$ pour tout entier n.

Or d'après la question 25, on a $\displaystyle\int_U F_n(u)\,\mathrm{d}\,u\leqslant M\int_U \mathrm{d}\,u=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2\varepsilon}{2^p}=2\varepsilon.$

Cette inégalité est également vraie avec la fonction F car, en considérant une suite extraite de la suite $\big(\varphi_n(u)\big)$ qui converge vers $\psi_1(u)$, on voit que l'on a également $\displaystyle\sup_{u\in[-A,A]}|u-\psi_1(u)|^2\leqslant M$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-A}^{A}F_n(u)\,\mathrm{d}\,u\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{-A}^{A}F(u)\,\mathrm{d}\,u.$ □

27 On comprend bien qu'il s'agit de démontrer que $\Phi(g)\leqslant E(g)$ comme annoncé au début de la partie III.

Sauf que $\Phi(g)$ n'est pas défini ! Sans-doute faut-il comprendre que $\displaystyle\Phi(g)\underset{\text{DEF}}{=}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u-\psi_1(u)|^2e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u=\int_{\mathbb{R}}F(u)\,\mathrm{d}\,u$ ce qui semble naturel. Encore faudrait-il prouver pour fonder cette définition que cela ne dépend pas de la suite approximante (f_n) choisie …

Soit $A>0$ donné quelconque. Nous avons $\displaystyle\int_{-A}^{A}F_n(u)\,\mathrm{d}\,u\leqslant\int_{\mathbb{R}}F_n(u)\,\mathrm{d}\,u\leqslant E(f_n)$ d'après la question 14.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient que $\displaystyle\int_{-A}^{A}F(u)\,\mathrm{d}\,u\leqslant E(g)$ d'après les questions 15 et 26.

Comme ceci est vrai pour tout $A>0$ cela prouve que la foction positive F est intégrable et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}F(u)\,\mathrm{d}\,u\leqslant E(g)$ i.e. que $\Phi(g)\leqslant E(g)$. □

FIN