

Les calculatrices sont autorisées

Notations

n et m sont des entiers naturels vérifiant $1 \leq m \leq n$.

E et F désignent les espaces vectoriels \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m munis de leur structure euclidienne canonique. On note I_E l'application identité de E . Le produit scalaire est noté (\cdot, \cdot) aussi bien dans E que dans F et la norme euclidienne est notée $\|\cdot\|$. $S^+(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) positifs de E , $S^{++}(E)$ le sous-ensemble constitué des endomorphismes autoadjoints définis positifs. On rappelle que, si $u \in S^{++}(E)$, alors $\phi_u : (x, y) \mapsto (u(x)|y)$ est un produit scalaire sur E .

Partie I - Produit de deux endomorphismes autoadjoints positifs

On se propose dans cette partie de montrer, en plus de quelques généralités, que si u et v sont des éléments de $S^+(E)$, alors $u \circ v$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans \mathbb{R}^+ .

I.A - Généralités

I.A.1) Montrer qu'un endomorphisme symétrique de E est dans $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) si et seulement si son spectre est inclus dans \mathbb{R}^+ (resp. \mathbb{R}^{++}).

I.A.2) Montrer que si $u \in S^{++}(E)$, alors $u^{-1} \in S^{++}(E)$.

I.A.3) Soit $u \in S^+(E)$.

a) Montrer qu'il existe un élément s de $S^+(E)$ tel que $u = s^2$.

b) En déduire que :

$$\forall x \in E, (u(x)|x) = 0 \Rightarrow u(x) = 0. \quad (1)$$

I.B - Preuve du résultat

u et v désignent des éléments de $S^+(E)$.

I.B.1) On note u_1 et w les endomorphismes de $Im(u)$ induits par u et $u \circ v$ respectivement.

a) Montrer que u_1 est un élément de $S^{++}(Im(u))$.

b) Montrer que w est autoadjoint positif relativement à $\phi_{u_1^{-1}}$ où $\phi_{u_1^{-1}}$ est le produit scalaire sur $Im(u)$ défini dans les notations.

I.B.2) Déduire de la question précédente que l'endomorphisme de $Im(u \circ v)$ induit par $u \circ v$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans \mathbb{R}^+ .

I.B.3) Montrer, à l'aide de (1), que :

$$E = Im(u \circ v) \oplus Ker(u \circ v).$$

I.B.4) Conclure.

I.C - Cas particulier

a désigne un élément de $S^{++}(E)$ et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

I.C.1)

a) Montrer qu'il existe un unique élément g de $\mathcal{L}(F, E)$ tel que, pour tout couple (x, y) de $E \times F$, $(f(x)|y) = (x|g(y))$.

L'application g est notée f^* .

b) Montrer que : $Ker(f^*) = [Im(f)]^\perp$.

c) En déduire que si une suite $(z_k)_k$ d'éléments de $Im(f)$ est telle que la suite $(f^*(z_k))_k$ converge vers 0, alors la suite $(z_k)_k$ converge vers 0.

d) Montrer que :

$$f^* \circ f \in S^+(E).$$

I.C.2) Montrer que $a^{-1} \circ f^* \circ f$ est un endomorphisme diagonalisable de E et que son spectre est inclus dans \mathbb{R}^+ .

On note ρ sa plus grande valeur propre.

I.C.3) Montrer que :

$$\forall x \in E, \|f(x)\|^2 \leq \rho(a(x)|x).$$

Partie II - Minimisation d'une fonctionnelle quadratique

Désormais a désigne un élément de $S^{++}(E)$, b est un élément fixé de E et f est un élément non nul de $\mathcal{L}(E, F)$.

J est l'application de E dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in E, J(x) = \frac{1}{2}(a(x)|x) - (b|x).$$

II.A - Minimisation théorique

On considère un sous-espace vectoriel V de E et on s'intéresse à la minimisation de la restriction de J à V .

II.A.1) Montrer que si $\|x\|$ tend vers $+\infty$ et $x \in V$, alors $J(x)$ tend vers $+\infty$.

II.A.2) Dédurre de la question précédente l'existence d'un minimum de la restriction de J à V .

II.A.3) Soit (x, y) un élément de V^2 tel que $x \neq y$.

a) Montrer que :

$$J\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{J(x) + J(y)}{2}.$$

b) En déduire que la restriction de J à V atteint son minimum en un seul point.

II.A.4) Soit $x \in V$ et $(t, h) \in \mathbb{R} \times V$.

a) Calculer $J(x+th) - J(x)$.

b) En déduire que la restriction de J à V est minimale en x si et seulement si

$$a(x) - b \in V^\perp. \quad (2)$$

II.A.5) Ici $n = 3$ et ω est l'élément de E en lequel J est minimale. Pour tout réel $k > J(\omega)$, on note \mathcal{E}_k la surface d'équation $J(x) = k$ et on considère un plan vectoriel Π inclus dans E auquel ω n'appartient pas.

a) Déterminer la nature de la surface \mathcal{E}_k et donner son centre.

b) Montrer qu'il existe une unique valeur de k pour laquelle Π est tangent à la surface \mathcal{E}_k .

c) Déterminer cette valeur de k si \mathcal{E}_k et Π sont d'équations respectives :

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x = k \text{ et } x + y + z = 0 \text{ relativement à la base canonique de } E.$$

II.B - Lagrangien augmenté

Soit r un réel positif et L_r est l'application de $E \times F$ dans \mathbb{R} définie par

$$L_r(x, p) = J(x) + \frac{r}{2}\|f(x)\|^2 + (p|f(x)).$$

On dit que (x, p) est un point selle de L_r si, pour tout couple (y, q) dans $E \times F$, $L_r(x, q) \leq L_r(x, p) \leq L_r(y, p)$ ou encore $(L_r(x, \cdot))$ est maximale en p et $L_r(\cdot, p)$ est minimale en x .

II.B.1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $L_r(x, \cdot)$ admet un maximum,
- $x \in \text{Ker}(f)$,
- $L_r(x, \cdot)$ est constante.

II.B.2) Montrer que :

$$L_r(\cdot, p) \text{ est minimale en } x \text{ si et seulement si } (a + r f^* \circ f)(x) + f^*(p) = b. \quad (3)$$

II.B.3)

a) Montrer que (x, p) est un point selle de L_r si et seulement si

$$(x \in \text{Ker}(f) \text{ et } a(x) + f^*(p) = b). \quad (4)$$

b) En déduire que la restriction de J à $\text{Ker}(f)$ est minimale en x si et seulement si il existe un élément p de F tel que (x, p) est un point selle de L_r .

II.B.4) Soit (x, p) un point selle de L_r .

a) Montrer que (x, p') est encore un point selle de L_r si et seulement si $p' - p$ est un élément de $[m(f)]^\perp$.

b) Montrer que, parmi les points selle de L_r du type (x, p') , il en existe un et un seul pour lequel $\|p'\|$ est minimale et le caractériser.

Partie III - Algorithmes d'Uzawa et d'Arrow-Hurwicz

On reprend les notations de la partie précédente et on note x l'élément de $\text{Ker}(f)$ en lequel la restriction de J à $\text{Ker}(f)$ est minimale. On note également p un élément de F tel que (x, p) est un point selle de L_r .

ρ désigne la plus grande valeur propre de $a^{-1} \circ f^* \circ f$, p_0 est fixé dans F et $(\gamma_k)_k$ désigne une suite de réels à valeurs dans $[\alpha, \beta]$, où $0 < \alpha < \beta < 2(r + \frac{1}{\rho})$.

On considère la suite $(x_k)_k$ d'éléments de E et la suite $(p_k)_k$ d'éléments de F définies de la façon suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, L_r(\cdot, p_k) \text{ est minimale en } x_k \text{ et } p_{k+1} = p_k + \gamma_k f(x_k).$$

III.A -

III.A.1) On pose, pour tout k de \mathbb{N} , $y_k = x_k - x$ et $r_k = p_k - p$.

a) Montrer que :

$$r_{k+1} = r_k + \gamma_k f(y_k) \quad \text{et} \quad (a + r f^* \circ f)(y_k) + f^*(r_k) = 0.$$

b) Montrer que :

$$\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = \gamma_k [2(a(y_k)|y_k) + (2r - \gamma_k)\|f(y_k)\|^2] \geq \alpha \left[2\left(r + \frac{1}{\rho}\right) - \beta \right] \|f(y_k)\|^2.$$

c) En déduire la convergence de la suite $(\|r_k\|)_k$ puis celle de la suite $(x_k)_k$ vers x .

III.B -

III.B.1) On pose, pour tout entier k , $p_k = \bar{p}_k + \bar{q}_k$ où $(\bar{p}_k, \bar{q}_k) \in \text{Im}(f) \times [\text{Im}(f)]^\perp$ et, de même, $p = \bar{p} + \bar{q}$ où $p \in (\bar{p}, \bar{q}) \in \text{Im}(f) \times [\text{Im}(f)]^\perp$.

a) Montrer que la suite $(\bar{q}_k)_k$ est constante.

b) Montrer que :

$$f^*(\bar{p}_k - \bar{p}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

c) En déduire que la suite $(p_k)_k$ converge vers $\bar{p} + \bar{q}_0$.

Désormais, on choisit $p_0 = 0$ et la suite $(\gamma_k)_k$ constante égale à γ . Dans ces conditions, la suite $(x_k, p_k)_k$ converge vers (\bar{x}, \bar{p}) point selle de L_r avec $\|\bar{p}\|$ minimale.

III.B.2) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = \left([E - \gamma(a + r f^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f]^k \circ (a + r f^* \circ f)^{-1} \right) (b).$$

III.B.3) On suppose que, relativement à la base canonique de E , la matrice de a est diagonale, soit $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ et que celle de f , relativement aux bases canoniques de E et F , admet pour coefficient générique

$$f_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que $I_E - \gamma(a + r f^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f$ est un endomorphisme autoadjoint de E qui laisse stables $\text{Ker}(f)$ et $[\text{Ker}(f)]^\perp$. On note ψ l'endomorphisme induit sur $[\text{Ker}(f)]^\perp$.

b) Déterminer la norme de ψ subordonnée à $\|\cdot\|$; on la note ϵ .
 c) r est supposé fixé. Comment choisir γ pour que ϵ soit minimal? Quelle est alors sa valeur?

d) Quelle est alors l'influence de r sur la rapidité de convergence de la suite $(x_k)_k$?
 III.B.4) On se place toujours dans les bases canoniques de E et F et on se donne les matrices A, B et F de a, b et f par leur coefficient générique :

$$a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad b_i = 1, \quad f_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = m + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que a est effectivement un endomorphisme de E défini positif.

b) Écrire une procédure effectuant lorsqu'on choisit $\gamma = 2r$, le calcul de X_k , matrice de x_k relativement à la base canonique de E (on supposera n, m et r définis numériquement mais on définira les matrices A, B et F).

••• FIN •••