Exercice 1. *(☕) 1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application dérivable, montrer que $f'(a)$ est valeur d'adhérence de $f'(]a,b[)$.*

2) Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une application dérivable sur $]a,b[$ sauf peut être en un point $c \in]a,b[$. Si $f'(x)$ admet une limite l lorsque x tend vers c, montrer que f est dérivable en c et $f'(c) = l$.

Exercice 2. *(☕) Démontrer le théorème de Darboux : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I, alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur I.*

Exercice 3. *(☕) 1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, montrer que f est continue à l'origine si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 0 à l'origine ; montrer que f est dérivable à l'origine si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 à l'origine.*
2) Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ *Montrer que f est discontinue en tous points de $\mathbb{R}^\star$, qu'elle est continue et dérivable à l'origine et nulle part deux fois dérivable. Toutefois montrer que f admet à l'origine un développement limité à tout ordre.*

Exercice 4. *(☕) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :* $f(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p \wedge q = 1, \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

1) Montrer que f est 1-périodique.
2) Montrer que f est discontinue sur $\mathbb{Q}$.
3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
4) Montrer que f est nulle part dérivable.

Exercice 5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'(x) = O(x)$, $(x \to +\infty)$, montrer que $f(x) = O(x^2)$, $(x \to +\infty)$.*

Exercice 6. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^\star$ trois réels deux à deux distincts. Déterminer les applications $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 7. *(☕)Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, si $f(0) = 0$ montrer que* $\lim_{x\to 0_+} \sum_{k=1}^{E(1/\sqrt{x})} f(kx) = f'(0)/2$.

Exercice 8. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, convexe et majorée : montrer que f est constante.*

Exercice 9. *(☕) Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(]-a,a[)$ telle que $f^{(n)} \geq 0$. Montrer que f est développable en série entière à l'origine.*

Exercice 10. *Avec la formule de Taylor-Lagrange, montrer que le millième chiffre aprés la virgule dans l'écriture décimale de la racine carrée de $N = 111\dots111 = (10^{1998} - 1)/9$ vaut 1.*

Exercice 11. *Utilisez le théorème des accroissement finis sur une fonction convenable pour établir la divergence de la série harmonique $\sum_n \frac{1}{n}$.*

Exercice 12. *(☕) Donnez à la main une valeur approchée de $\log(1,003)$ avec une erreur inférieure à 10^{-8}.*

Exercice 13. *(☕) On définit la fonction exponentielle comme la solution de l'équation différentielle $y' = y,\ y(0) = 1$. Utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour montrer que $e := y(1) \in]5/2, 3[\setminus\mathbb{Q}$.*

Exercice 14. *On se fixe un point P sur la parabole $y = x^2$ (distinct de l'origine). La normale à $(\mathscr{P})$ passant par P recoupe la parabole en un point Q ; déterminer P pour que l'arc de parabole reliant P et Q soit de longueur minimale.*

Exercice 15. *En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \log(1+x)$ sur les segments $[0, x/q]$ et $[x/q, x/p]$, montrer que pour $0 < p < q$:* $\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p < \left(1 + \frac{x}{q}\right)^q, \quad \forall x > 0.$

Exercice 16. (1) *Montrer que* $e^x \geq 1+x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. *En « déduire » l'inégalité arithmético-géométrique*
$$A_n := \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq (a_1a_2\dots a_n)^{1/n} := G_n, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^\star,\ a_1,a_2\dots,a_n\geq 0,$$
et préciser le cas d'égalité (appliquer l'inégalité à $x=-1+a_i/A_n,\ 1\leq i\leq n$*...).*

(2) *(L'inégalité Arithmético-Géométrique version améliorée via Taylor-Lagrange) Pour* $x_1,x_2,\dots x_n\in\mathbb{R}_+$ *on note* $\overline{x_a}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, $\overline{x_g}=(x_1\dots x_n)^{1/n}$, $M=\max_{1\leq i\leq n}x_i$, $m=\min_{1\leq i\leq n}x_i$, $\sigma^2=n^{-1}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2$*.Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction* $\log$ *aux points* $\overline{x},x_i\in[m,M]$ *pour en déduire* $\exp(\sigma^2/2M^2)\leq\dfrac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}}\leq\exp(\sigma^2/2m^2)$. *Préciser le cas d'égalité.*

Exercice 17. *Montrer que* $\dfrac{2x}{\pi}\leq\sin(x)\leq x,\quad\forall\, x\in[0,\pi/2]$, *et représenter graphiquement cette inégalité (pour la première inégalité on pourra par exemple montrer que pour tout* $0<x<\pi/2$*,il existe* $0<\theta<x$ *tel que* $\sin(x)/x=\cos(\theta)$ *pour en déduire que la fonction* $f(x)=\sin(x)/x,\ x\in]0,\pi/2],\ f(0)=1$ *est strictement décroissante sur* $[0,\pi/2]$*...).*

Exercice 18. *On veut calculer* $\lambda:=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

(1) *Justifier l'existence de* λ.

(2) *Soit* $f\ :\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ *dérivable, si* $f(0)=0$ *montrer que* $\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f\left(\frac{1}{n+2}\right)\cdots+f\left(\frac{1}{2n}\right)\right)=\lambda f'(0)$.

(3) *En considérant* $f(x)=\log(1+x)$*, montrer que* $\lambda=\log(2)$*. (bonus : trouver une preuve plus simple avec les sommes de Riemann).*

Exercice 19. *(☕) Calculer le développement limité à l'origine et à l'ordre* 100 *de* $f(x)=\log\left(\sum_{k=1}^{99}x^k/k!\right)$.

Exercice 20. *Montrer que*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3},\quad \lim_{x\to 2_+}\left(2^x+3^x-12\right)^{\tan(\pi x/4)}=\exp\left[-\frac{4}{\pi}\left(4\log(2)+9\log(3)\right)\right]$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1}=1,\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{t^2+t})-\mathrm{sh}(\sqrt{t^2-t})}{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t^2}-\dfrac{t^6}{6}\log^2(t)}=\frac{e-1}{2},,\quad \lim_{n\to+\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}=1,$$

$$\lim_{x\to 5}(6-x)^{1/(x-5)}=e^{-1},\quad \lim_{x\to 0_+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin(1/x)\right)^x=1,$$

Exercice 21. *Soient* $0<a<b$*, pour* $x\in\mathbb{R}^\star$ *on pose* $f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x^2}$.

1) Montrer que f *se prolonge à l'origine en une fonction dérivable.*

2) Montrer que $f(x)f(-x)=ab$.

3) Etudier et representer soigneusement f *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 22. *Etudier et representer soigneusement* $f(x)=\log\left(2-e^{-1/x}\right)$ *sur son domaine de définition.*

Exercice 23. *(☕) Soit* $f(x)=\dfrac{1}{1+2x+3x^2+...+2009x^{2010}}$*, que vaut* $f^{(2010)}(0)$ *? (commencez par écrire plus simplement* f *pour en déduire facilement un développement limité à l'ordre* 2010 *à l'origine...).*

Exercice 24. *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\log(2)}-\dfrac{1}{2^x-1} & si\ \ x\in\mathbb{R}^\star,\\ a & si\ \ x=0.\end{cases}$ *Comment choisir* $a\in\mathbb{R}$ *pour que* f *soit continue à l'origine ?* f *ainsi prolongée est-elle dérivable à l'origine ?*

Exercice 25. *Soit* $f\in\mathscr{C}^3([0,1])$ *telle que* $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'(1)=f''(1)=0$ *et* $f(1)=1$*. Montrer qu'il existe* $0<c<1$ *tel que* $f^{(3)}(c)\geq 24$.

Exercice 26. *Calculer d'au moins trois manières différentes le développement limité à l'ordre* 3 *à l'origine de la fonction tangente*