Autour du groupe orthogonal $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et unitaire $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$.

Quelques rappels et notations : Une matrice réelle $A \in M_n(\mathbb{R})$ sera dite symétrique si ${}^tA = A$ et on écrira $A \in \mathscr{S}_n$, elle sera symétrique positive si on a de plus $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et on écrira $A \in \mathscr{S}_n^+$. Elle sera symetrique définie positive si de plus $\langle Ax, x\rangle > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on écrira $A \in \mathscr{S}_n^{++}$Soit E un espace euclidien de dimension n, on dit qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est orthogonal si $\|ux\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$, on écrira $u \in O_n(E)$ et sa matrice A dans une base orthonormée vérifiera $A^tA = I_n$, on dira que A est orthogonale et $A \in O_n(\mathbb{R})$ (on a une définition analogue pour le cas complexe : une matrice complexe $A \in M_n(\mathbb{C})$ sera unitaire si $A^t\overline{A} = I_n$ et on écrira $A \in U_n(\mathbb{R})$).

(1) Soient E un $\mathbb{R}$ espace euclidien de dimension $n \geq 2$, φ un endomorphisme orthogonal de E et O sa matrice dans une base orthonormale.
 (a) Quelle est la forme des matrices de $O_2(\mathbb{R})$?
 (b) Montrer que si φ ne possède pas de valeurs propres réelles alors il existe un plan stable par φ.
 (c) En déduire qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^{-1}OU$ soit une matrice diagonale par blocs du type $\mathrm{diag}(I_r, -I_s, O_1, \dots, O_t)$ où $O_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

(2) Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle positive, montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$ et que B est un polynôme en A.

(3) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$ et que S est un polynôme en ${}^tAA$.

(4) Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

(5) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(O, S) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

(6) Montrer que la correspondance $GL_n(\mathbb{R}) \ni A \mapsto (O, S) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (voir 4)) est bicontinue.

(7) Montrer que les valeurs propres des éléments d'un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ sont de module 1

(8) Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ maximal pour l'inclusion.

(9) Soit $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, déterminer la $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ (on peut commencer par montrer que $\mathbb{R}^n = \ker(A - I_n) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(A - I_n)$).

(10) Déterminer les extréma de la trace sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

(11) Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes qui sont connexes par arcs.

(12) Montrer que le groupe unitaire $\mathscr{U}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

11 novembre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mél : lassere@math.ups-tlse.fr