ℹ `Durée 4 heures : les logarithmes sont tous népériens !`

Exercice.

(1) (a) Si c et d sont deux réels et k un entier naturel non nul, montrer que

$$\int_0^1 (ct^2+dt)\cos(k\pi t)dt = \frac{(2c+d)(-1)^k - d}{k^2\pi^2}.$$

(b) En déduire qu'il existe un unique couple (a,b) de réels tels que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)dt = \frac{1}{k^2}.$$

(c) Calculer alors, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de $\displaystyle\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)dt$.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\theta \in]0,\pi[$: $\displaystyle 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

(3) Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

(a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$: $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt = \frac{f(0)-f(1)\cos(\lambda)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt$.

(b) En déduire la limite $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt$.

(4) On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \frac{\pi^2(t^2-2t)}{4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}, \quad \text{si } t \in]0,1] \quad \text{et } f(0) = -\pi.$$

(a) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$.

(c) Montrer que f' est continue sur $[0,1]$.

(d) Montrer que $\displaystyle (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right) = f(t)\sin\left((2n+1)\frac{\pi t}{2}\right)$.

(e) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{k^2}$ ainsi que la valeur de sa somme.

Problème.

Dans ce problème, par « solution d'une équation différentielle », on fait référence aux solutions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$, on lui associe lŠéquation différentielle

$(\mathscr{E}_f)$ $$y'' + y = f..$$

Première partie.

(1) Montrer que l'ensemble Σ_0 des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_0)\ :\ y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

(2) Soit λ un réel non nul et tel que $\lambda^2 \neq 1$; Σ_λ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}_\lambda) \qquad y'' + y = \sin(\lambda x).$$

(a) Montrer qu'il existe un unique réel a, tel que la fonction $S_\lambda\ :\ x \mapsto a\sin(\lambda x)$ soit un élément de Σ_λ.

(b) Montrer qu'alors $\Sigma_\lambda = \{\ x \mapsto \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + S_\lambda(x),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,\}$.

(c) Vérifier que les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$ sont toutes 2π-périodiques.

(d) Montrer que la fonction S_λ est périodique, préciser ses périodes puis en déduire que l'équation différentielle $(\mathscr{E}_{\sqrt{2}})$ n'a pas de solutions 2π-périodiques.

Seconde partie.

Dans cette partie, $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt, \quad \varphi_1(x) = \int_0^x f(t)\cos(t)dt, \quad \varphi_2(x) = \int_0^x f(t)\sin(t)dt.$$

(1) Montrer que φ_1 et φ_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivées $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)$ pour tout réel x.

(2) (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) = \varphi_1(x)\sin(x) - \varphi_2(x)\cos(x)$.

(b) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout réel x.

(c) Montrer que φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_f)$.

(3) Soit g une solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_f)$; montrer que la fonction $g - \varphi$ est solution de l'équation $y'' + y = 0$. En déduire Σ_f.

(4) Une application : soit $h\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 vérifiant $h'' + h \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Vérifier que h est solution de l'équation différentielle (Σ_{f_1}) où $f_1 = h'' + h$.

(b) En déduire une expression de h puis montrer que pour tout réel x : $h(x+\pi) + h(x) \geq 0$.

(5) On suppose dans cette question que f est 2π-**périodique.**

(a) Si l'équation $(\mathscr{E}_f)$ possède une solution 2π-périodique g.

(i) Montrer que la fonction φ est alors 2π-périodique.

(ii) Montrer que pour tout réel x : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)dt = 0$ et en déduire que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)dt = 0.$$

(b) Réciproquement, montrer que si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)dt = 0.$ alors toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_f)$ sont 2π-périodiques.

(c) Si f est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathscr{E}_f)$ admet-elle des solutions 2π-périodiques ?

Troisième partie.

Dans cette partie, on considère une fonction $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 croissante et possédant une limite finie l en $+\infty$.

(1) (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $x \geq A$ implique $|f(x)| \leq 1 + |l|$.

(b) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(2) (a) Montrer que la fonction f' est positive et que l'intégrale impropre $\int_0^\infty f'(t)dt$ est convergente ; préciser la valeur de cette intégrale.

(b) En déduire que les intégrales $\int_0^\infty f'(t)\cos(t)dt$ et $\int_0^\infty f'(t)\sin(t)dt$ sont convergentes.

(3) (a) Montrer que pour tout réel x :

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt = f(x) - f(0)\cos(x) - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)dt.$$

(b) En déduire que toute solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_f)$ est de la forme

$$Y_{\alpha,\beta}(x) = f(x) + \left(\alpha - f(0) - \int_0^x f'(t)\cos(t)dt\right)\cos(x) + \left(\beta - \int_0^x f'(t)\sin(t)dt\right)\sin(x).$$

où α, β sont deux réels.

(c) Montrer alors que toute les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_f)$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

(4) Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, on suppose que la solution $Y_{\alpha,\beta}$ de $(\mathscr{E}_f)$ admet une limite finie en $+\infty$.

(a) en étudiant la suite $(Y_{\alpha,\beta}(n\pi))_n$, montrer que $\alpha = f(0) + \int_0^x f'(t)\cos(t)dt$.

(b) Trouver de même la valeur de β.

(5) Montrer alors que l'équation différentielle $(\mathscr{E}_f)$ possède une unique solution notée Y_f ayant une limite finie en $+\infty$ que l'on précisera ; enfin montrer que

$$Y_f(x) = f(x) + \int_x^\infty f'(t)\cos(x-t)dt, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Fin du problème.

26 octobre 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr

Corrigé du Devoir Préparé 8 :

L'Exercice.

(1) (a) On fait deux intégration par parties pour faire disparaitre le polynôme ct^2+dt et le résultat suit.

(b) Il faut donc avoir $(2c+d)(-1)^k - d = \pi^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$; en choississant k pair puis k impair on trouve immédiatement $a = \pi^2/2$ et $b = -\pi^2$.

(c) On a donc pour tout $n \geq 1$:

$$\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n \cos(k\pi t)\right)dt = \int_0^1 \frac{at^2+bt}{2}dt + \sum_{k=1}^n \int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)dt$$
$$= \left[\frac{at^3}{3}+\frac{bt^2}{2}\right]_0^1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\theta \in]0,\pi[$:

$$1+2\sum_{k=1}^n \cos(2k\theta) = 1+2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{2ik\theta}\right). = 1+2\mathrm{Re}\left(e^{2i\theta}\frac{1-e^{2in\theta}}{1-e^{2i\theta}}\right)$$
$$= 1+\mathrm{Re}\left(\frac{e^{2i\theta}-1+e^{2in\theta}-e^{2i(n+1)\theta}}{1-\cos(2\theta)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2in\theta}-e^{2i(n+1)\theta}}{1-\cos(2\theta)}\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{\cos(2n\theta)-\cos(2(n+1)\theta)}{1-\cos(2\theta)}\right) = \frac{\sin\left((2n+1)\theta\right)}{\sin(\theta)}.$$

(3) (a) f étant de classe C^1 il suffit de faire une intégration par parties.

(b) f étant de classe C^1, f et f' sont bornées sur le fermé borné $[0,1]$ donc avec la question précédente :

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt\right| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\lambda}+\frac{2\|f'\|_\infty}{\lambda},$$

par conséquent : $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt = 0.$

(4) (a) Cherchons un éventuel développement limité de f à l'origine :

$$f(t) = \frac{\pi^2(t^2-2t)}{4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \frac{\pi^2(t^2-2t)}{2\pi t+o(t^2)} = \frac{\pi}{2}\frac{t-2}{1+o(t)} = -\pi+\frac{\pi t}{2}+o(t).$$

Par conséquent, comme $f(0) = -\pi$, elle admet bien un développement limité à l'ordre 1 à l'origine ; le cours nous assure que f est bien dérivable en $t+0$ avec $f'(0) = \pi/2$.

(b) Il reste à montrer quelle est de classe C^1 i.e. que f' est continue à l'origine et une fois de plus un développement limité assure que $\lim_0 f'(x) = \pi/2 = f'(0)$ CQFD.

(c) Pour $t=0$ il n'y a rien à démontrer, pour $t \in]0,1]$ alors $\frac{\pi t}{2} \in]0,\pi/2] \subset]0,\pi[$ et on peut remplacer θ par $\pi t/2$ dans la question (2) :

$$(at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos(k\pi t)\right) = \frac{at^2+bt}{2}\left(1+2\sum_{k=1}^n\cos(k\pi t)\right) = \frac{at^2+bt}{2}\left(1+2\sum_{k=1}^n\cos(2k\frac{\pi t}{2})\right)$$
$$= \frac{\pi^2t^2/2-\pi^2t}{2}\cdot\frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi t}{2}\right)}{\sin(\pi t/2)} = f(t)\sin\left((2n+1)\frac{\pi t}{2}\right).$$

(5) En combinant tout ce qui précède nous avons pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^N \int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^N (at^2+bt)\cos(k\pi t)dt$$
$$= \int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^N\cos(k\pi t)\right)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 (\pi^2t^2/2-\pi^2 t)dt$$
$$= \int_0^1 f(t)\sin\left((2N+1)\frac{\pi t}{2}\right)dt - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2t^3}{3}-\frac{\pi^2t}{2}\right]_0^1$$
$$= \int_0^1 f(t)\sin\left((2N+1)\frac{\pi t}{2}\right)dt + \frac{\pi^2}{6} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6},$$

où la dernière limite résulte de (3-b) puisque $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$ d'aprés (4-a-b-c). Autrement dit, la série $\sum_k 1/k^2$ converge et a pour somme $\pi^2/6$.

Le Problème.

Première partie.

(1) Classiquement $\Sigma_0 = \{\alpha\cos(x) + \beta\sin(x),\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}\{\cos(x), \sin(x)\}$ c'est donc l'espace vectoriel réel de dimension 2 engendré par $x \mapsto \cos(x)$ et $y \mapsto \sin(x)$.

(2) (a) $S_\lambda \in \Sigma_\lambda$ équivaut à $-a\lambda^2\sin(\lambda x) + a\sin(\lambda x) = \sin(\lambda x)$ soit (puisque $\lambda \neq 0$) $a(1-\lambda^2) = 1$ soit $a = \frac{1}{1-\lambda^2}$ (puisque $\lambda^2 \neq \pm 1$...).

(b) Il est bien connu que les solutions générales de l'équation différentielle sont de la forme « une solution générale de l'équation sans second membre plus une solution particulière de l'équation avec second membre » ; les deux questions précédentes donnent par conséquent : $\Sigma_\lambda = \{\frac{\sin(\lambda x)}{1-\lambda^2} + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x),\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ c'est un espace affine de dimension 2.

(c) Vu 1-b : $\Sigma_2 = \{-\frac{\sin(2x)}{3} + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x),\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$, il est bien évident que ces fonctions sont toutes 2π-périodiques.

(d) Les périodes de S_λ sont les $2k\pi/\lambda$, $(k \in \mathbb{Z})$; si l'équation $(\mathscr{E}_{\sqrt{2}})$ admet des solutions 2π-périodiques alors vu 1-c, $S_{\sqrt{2}}$ sera 2π-périodique ce qui est absurde.

Seconde partie.

(1) C'est le cours puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ et on a $\varphi_1'(x) = f(x)\cos(x)$, $\varphi_2(x) = f(x)\sin(x)$.

(2) (a) Avec les formules trigonométriques $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt = \int_0^x f(t)\left(\sin(x)\cos(t) - \sin(t)\cos(x)\right)dt = \sin(x)\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\cos(x)$.

(b) Comme φ_1 et φ_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ la formule précédente assure que φ sera aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = \sin(x)\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)\cos(x) + \cos(x)\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\sin(x) = \sin(x)f(x)\cos(x) - f(x)\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\sin(x) = \cos(x)\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\sin(x)$.

(c) Comme $\varphi'(x) = \cos(x)\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\sin(x)$, φ est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi''(x) = \cos(x)\varphi_1'(x) + \varphi_2'(x)\sin(x) - \sin(x)\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\cos(x) = f(x) - \varphi(x)$ soit $\varphi'' + \varphi = f$: φ est donc bien une solution particulière de $(\mathscr{E}_f)$.

(3) Comme plus haut : les solutions générales de l'équation différentielle sont de la forme « une solution générale de l'équation sans second membre plus une solution particulière de l'équation avec second membre » ; comme φ est solution particulière $\Sigma_f = \{\varphi(x) + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x),\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$

(4) (a) C'est évident.

(b) Puisque h est solution de (Σ_{f_1}) avec la question (3) nous pouvons écrire $h(x) = \varphi(x) + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) = \int_0^x (h''(t) + h(t))\sin(x-t)dt + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$. Soit avec quelques intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_0^x h''(t)\sin(x-t)dt + \int_0^x h(t)\sin(x-t)dt + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)\\
&= \left[h'(t)\sin(x-t)dt\right]_0^x + \int_0^x h'(t)\cos(x-t)dt + \int_0^x h(t)\sin(x-t)dt + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)\\
&= -h'(0)\sin(x) + [h(t)\cos(x-t)dt]_0^x - \int_0^x h(t)\sin(x-t)dt + \int_0^x h(t)\sin(x-t)dt + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)\\
&= -h'(0)\sin(x) + h(x) - h(0)\cos(x) + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)
\end{aligned}$$

soit $-h'(0)\sin(x) - h(0)\cos(x) + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) = 0$ pour tout réel x : $\alpha = h(0), \beta = h'(0)$ et $h(x) = \int_0^x (h''(t) + h(t))\sin(x-t)dt + h(0)cos(x) + h'(0)\sin(x)$; maintenant pour tout réel x on peut écrire :

$$\begin{aligned}
h(x+\pi) + h(x) &= \int_0^{x+\pi} (h''(t) + h(t))\sin(x+\pi-t)dt + h(0)cos(x+\pi) + h'(0)\sin(x+\pi)\\
&\quad + \int_0^x (h''(t) + h(t))\sin(x-t)dt + h(0)cos(x) + h'(0)\sin(x)\\
&= -\int_0^{x+\pi} (h''(t) + h(t))\sin(x-t)dt + \int_0^x (h''(t) + h(t))\sin(x-t)dt = -\int_x^{x+\pi} (h''(t) + h(t))\sin(x-t)dt\\
&= \int_x^{x+\pi} (h''(t) + h(t))\sin(t-x)dt = \int_0^\pi (h''(x+u) + h(x+u))\sin(u)du \geq 0
\end{aligned}$$

puisque la fonction sinus est positive sur $[0,\pi]$ et $h'' + h \geq 0$.

(5) (a) (i) Vu (3) $g(x) = \varphi(x) + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$ soit $\varphi(x) = g(x) - \alpha\cos(x) - \beta\sin(x)$ qui est 2π-périodique comme différence de deux fonction 2π-périodiques.

(ii) Par la question précédente, φ est 2π-périodique donc par périodicite de f et sin :
$$0=\varphi(x+2\pi)-\varphi(x)=\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)dt=\int_0^{2\pi} f(u)\sin(x-u)du.$$
En particulier, pour $x=0$ on tire $\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)dt=0$ et pour $x=\pi/2$: $\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)dt=0$.

(b) Réciproquement, supposons que $\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)dt=0$ et $\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)dt=0$; si on montre que l'équation $(\mathscr{E}_f)$ admet une solution 2π-périodique alors toutes les solutions seront 2π-périodique par (5-a-i) et (3). Or comme
$$\varphi(x+2\pi)-\varphi(x)=\int_0^{2\pi} f(u)\sin(x-u)du=\sin(x)\int_0^{2\pi} f(u)\cos(u)du-\cos(x)\int_0^{2\pi} f(u)\sin(u)du=0$$
la solution particulière φ est bien 2π-périodique.

(c) Des questions (5-a) et (5-b) on a démontré que si f est 2π-périodique alors les solutions de $(\mathscr{E}_f)$ sont 2π-périodique si, et seulement si, $\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)dt=0$ et $\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)dt=0$. Or pour la fonction 2π-périodique $f(t)=\sin(t)$ on a $\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)dt=\int_0^{2\pi}\sin^2(t)dt\neq 0$: $(\mathscr{E}_f)$ n'admet pas de solutions 2π-périodiques.

Troisième partie.

(1) (a) C'est une conséquence immédiate de la définition de la limite puisque $\lim_{+\infty}|f(t)|=|l|$.

(b) Par la question précédente, f est bornée sur $[A,+\infty[$. Etant continue elle l'est aussi sur le fermé borné $[0,A]$: elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(2) (a) f est dérivable et croissante : sa dérivée f' est donc positive. f' étant continue elle est intégrable sur tout $[0,A]$ et on a $\int_0^A f'(t)dt=f(A)-f(0)$ qui tends vers $l-f(0)$ lorsque A tends vers $+\infty$: l'intégrale impropre $\int_0^\infty f'(t)dt$ est donc convergente et vaut $l-f(0)$.

(b) Comme f' est positive sur $\mathbb{R}_+$ on aura $|f'(t)\cos(t)|\leq f'(t)$, on peut donc appliquer le théorème de comparaison et par suite $\int_0^\infty f'(t)\cos(t)dt$ est convergente (et même absolument) on fait de même avec le sinus.

(3) (a) Faire une intégration par parties.

(b) Les solutions de $(\mathscr{E}_f)$ sont de la forme (seconde partie question (3)) $\varphi(x)++\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)$, il ne reste plus qu'à appliquer la question précédente.

(c) Comme f est bornée et comme les intégrales $\int_0^\infty f'(t)\cos(t)dt$ et $\int_0^\infty f'(t)\sin(t)dt$ convergent absolument on montre sans peine (par des majorations grossières) que
$$Y_{\alpha,\beta}(x)=f(x)+\left(\alpha-f(0)-\int_0^x f'(t)\cos(t)dt\right)\cos(x)+\left(\beta-\int_0^x f'(t)\sin(t)dt\right)\sin(x).$$
est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(4) (a) On a $Y_{\alpha,\beta}(n\pi)=f(n\pi)+\left(\alpha-f(0)-\int_0^{n\pi} f'(t)\cos(t)dt\right)(-1)^n$, donc si $Y_{\alpha,\beta}$ admet une limite en $+\infty$ on aura $\alpha-f(0)=\int_0^\infty f'(t)\cos(t)dt$.

(b) De même en observant $Y_{\alpha,\beta}(n\pi+\pi/2)$ on tire $\beta=\int_0^\infty f'(t)\sin(t)dt$.

(5) La question précédente assure de l'existence d'une unique solution de l'équation différentielle admettant une limite en $+\infty$ qui sera bien entendu l ; avec les valeur de α et β trouvées plus haut, c'est
$$\begin{aligned}Y(x)&=f(x)+\left(f(0)+\int_0^\infty f'(t)\cos(t)dt-f(0)-\int_0^x f'(t)\cos(t)dt\right)\cos(x)+\left(\int_0^\infty f'(t)\sin(t)dt-\int_0^x f'(t)\sin(t)dt\right)\sin(x)\\&=f(x)+\cos(x)\int_x^\infty f'(t)\cos(t)dt+\sin(x)\int_x^\infty f'(t)\sin(t)dt=f(x)+\int_x^\infty f'(t)\cos(x-t)dt.\end{aligned}$$
CQFD.