Exercice 1 *Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendantes.*
Une usine fabrique, en grandes quantité, des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.
Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats approchés sont à arrondir et à donner à 10^{-2} près.

Partie A - Loi normale-

Voir annexe pour la lecture de la table de la loi normale.
Une rondelle de ce modèle est conforme pour le diamètre lorsque celui-ci appartient à l'intervalle $[89,6\ mm; 90,4\ mm]$

1. *On note* X_1 *la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la production associe son diamètre. On suppose que* X_1 *suit une loi normale de moyenne* $90\ mm$ *et d'écart type* $\sigma = 0,17\ mm$. *Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard soit conforme.*
2. *L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles : il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les rondelles. On note* D *la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée dans la production future, associera son diamètre. On suppose que la variable aléatoire* D *suit une loi normale de moyenne* $90\ mm$ *et d'écart type* σ_1. *Déterminer* σ_1 *pour que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme en terme de diamètre soit égale à 0,99.*

Partie B - Loi binomiale-

On considère un stock important de rondelles, et on note E *l'événement : "'une rondelle prélevée au hasard dans ce stock a un diamètre défectueux."' On suppose que la probabilité de l'événement* E *est* $p(E) = 0,02$. *On prélève au hasard quatre rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre rondelles.*
On considère la variable aléatoire Y_1 *qui à tout prélèvement de quatre rondelles associe le nombre de rondelles de ce prélèvement ayant un diamètre défectueux.*

1. *Justifier que la variable aléatoire* Y_1 *suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.*
2. *Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux. Arrondir à* 10^{-3} *près.*
3. *Calculer la probabilité que, dans un tel prèlèvement, au plus une rondelle ait un diamètre défectueux. Arrondir à* 10^{-3} *près.*

Partie C - Approximation d'une loi binomiale par une loi normale-

Les rondelles sont commercialisées par lot de 1000. On prélève au hasard un lot de 1000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1000 rondelles.
On considère la variable aléatoire Y_2 *qui, à tout prélèvement de 1000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1000 rondelles.*
On admet que la variable aléatoire Y_2 *suit la loi binomiale de paramètres* $n = 1000$ *et* $p = 0,02$. *On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire* Y_2 *par la loi normale de moyenne 20 et d'écart type* $4,43$. *On note* Z *une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 20 et d'écart type* $4,43$.

1. *Justifier les paramètres de cette loi normale.*
2. *Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1000 rondelles, c'est à dire calculer* $p(Z \leq 15,5)$.

Partie D - Test d'hypothèse-

Pour cette partie, on pourra cherche des explications dans les manuels scolaires de lycée, ainsi que dans les livres de la médiathèque de l'IUFM - voir en particulier les livres de P. Dutartre

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres, en millimètres, de rondelles constituant une livraison à effectuer.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la livraison, associe son diamètre.

La variable aléatoire X_2 suit la loi normale de moyenne d'inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0,17$. On désigne par $\overline{X_2}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 rondelles prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces rondelles (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est H_0 : $\mu = 90$ mm. Dans ce cas, la livraison est dite conforme pour le diamètre. L'hypothèse alternative est H_1 : $\mu \neq 90$ mm. Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. *Enoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test, en admettant, sous l'hypothèse nulle H_0, le résultat suivant qui n'a pas à être démontré :*

$$p\left(89,967 \leq \overline{X_2} \leq 90,033\right) = 0,95$$

2. *On prélève un échantillon de 100 rondelles dans la livraison et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\overline{x} = 90,02$. Peut-on, au seuil de 5%, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?*

Exercice 2 *Etudes de quelques courbes paramétrées*

Partie A- Etude d'une première courbe paramétrée-

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ *(on prendra 1 cm comme unité graphique). On définit la courbe* $\mathcal{C}$ *par ses équations paramétriques :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t + \sin t + \dfrac{1}{2}\sin(2t) \\ y(t) & = & (1+\cos t)^2 \end{array}\right.$$

1. (a) *Comparer les positions des points* $M(t)$ *et* $M(-t)$*. En déduire un axe de symétrie de* $\mathcal{C}$*.*
   (b) *Comparer les positions des points* $M(t)$ *et* $M(t+2\pi)$*. En déduire que la courbe est invariante par une translation que l'on précisera*
   (c) *Soit* $\mathcal{C}_1$ *l'arc de la courbe obtenu pour* $t \in [0;\pi]$*. Montrer que* $\mathcal{C}$ *peut se déduire de* $\mathcal{C}_1$ *par une succession de transformations que l'on explicitera.*
2. *Faire l'étude des fonctions* x *et* y *de la variable* t *sur* $[0;\pi]$*.*
3. *Tracer la courbe* $\mathcal{C}$*. On précisera les tangentes horizontales ou verticales.*

Partie B- Etude d'une seconde courbe paramétrée-

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$*. Soit* $\mathcal{H}$ *la courbe d'équations paramétriques :*
$\left\{\begin{array}{l} x(\theta) = \dfrac{2}{\cos\theta} \\ y(\theta) = 3\tan\theta \end{array}\right.$

1. *En considérant les paramètres* θ*,* $-\theta$ *et* $\pi - \theta$ *déduire un intervalle d'étude de la courbe* $\mathcal{H}$*.*
2. *Etudier les fonctions* x *et* y *du paramètre* θ*.*
3. *Montrer que* $\mathcal{H}$ *est l'ensemble des points* M *du plan tels que* $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$
4. *On considère le repère* $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v})$ *avec* $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ *et* $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$*. Donner l'équation de* $\mathcal{H}$ *dans ce nouveau repère. On précisera la nature,le tracé et les asymptotes de* $\mathcal{H}$

ANNEXE :
COMMENT UTILISER LA TABLE de la LOI NORMALE ?

1 Rappels mathématiques

<u>Définition :</u>
On dit qu'une variable aléatoire continue T, d'espérance mathématiques m et d'écart-type $\sigma > 0$ suit la loi normale de paramètre m (moyenne) et σ (écart type) si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2}$.
On note ici "'T suit la loi $N(m;\sigma)$"' par "'$T \propto N(m;\sigma)$"'

<u>Théorème :</u>
Soit une variable aléatoire T, suivant la loi normale $N(m;\sigma)$; alors les variables aléatoires de la forme $aT+b$ suivent également une loi normale. En particulier $T' = \dfrac{T-m}{\sigma}$ suit la loi normale $N(0;1)$.

<u>Proposition :</u> On note $\Pi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Soit $T \propto N(0;1)$. On a :
- $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$
- $P(T < a) = P(T \leq a) = \Pi(a)$
- $P(T > a) = P(T \geq a) = 1 - \Pi(a)$
- $P(a < T < b) = P(a \leq T \leq b) = \Pi(b) - \Pi(a)$
- $P(-a < T < a) = P(-a \leq T \leq a) = 2\Pi(a) - 1$

La table donne des approximations des valeurs de $\Pi(t)$ pour certains décimaux t. Dans tout ce qui suit, les résultats sont des approximationx. Il faut se rendre compte qu'on utilise la loi normale pour des situations réelles qui sont modélisées : en aucun cas, elle ne représente la réalité dans toute sa complexité.

2 Lecture de la table

<u>Lecture pour T suivant la loi normale $N(0;1)$:</u>
Nombre positifs à une décimale :
La première colonne de la table donne des valeurs de t à une décimale, et la colonne suivante donne une valeur approchée de $\Pi(t)$.
Ainsi, on peut lire $\Pi(2) \approx 0,9972$ et $\Pi(1,5) \approx 0,9332$.
Soit $T \propto N(0;1)$; de la lecture de la table, on déduit :$P(T < 2) \approx 0,9972$, et $P(T \geq 2) = 1 - \Pi(2) \approx 1 - 0,9972 = 0,0228$;
$P(T > 1,5) = 1 - \Pi(1,5) \approx 1 - 0,9332 = 0,0668$ $\qquad$ $P(1,5 < T < 2) \approx 0,9772 - 0,9332 = 0,0440$

Nombres positifs à deux décimales :
exemple $t = 1,53$ on regarde l'intersection de la ligne $1,5$ avec la colonne $0,03$ et on obtient $P(T \leq 1,53) = \Pi(1,53) \approx 0,9370$.

Nombres négatifs : la relation $\Pi(-t) = 1-\Pi(t)$ permet d'obtenir $\Pi(-1,5) = 1-\Pi(1,5) \approx 1-0,9332 = 0,0668$
$\Pi(-1,5 < T < 1,5) = \Pi(1,5) - (1 - \Pi(1,5)) = 2\Pi(1,5) - 1 \approx 0,8644$.
Quelles que valeurs à connaître - ce sont toujours des approximations ! :
- $P(-1 \leq T \leq 1) \approx 0,68$
- $P(-2 \leq T \leq 2) \approx 0,95$
- $P(-3 \leq T \leq 3) \approx 0,997$

<u>Lecture pour T suivant la loi normale $N(m;\sigma)$:</u>
On pose $T' = \dfrac{T-m}{\sigma}$; on sait que $T' \propto N(0;1)$, on lit les valeurs associées à T' dans la table
exemple : T suivant la loi normale $N(3;2)$; on cherche $p(T < 7)$

On a $T < 7 \Leftrightarrow T' = \dfrac{T-3}{2} < 2$.
On obtient grâce à la lecture de la table : $p(T < 7) = p(T' < 2) \approx 0,9972$.

Remarque : la table peut aussi servir en sens inverse : T suivant la loi normale $N(0;1)$, pour quelle valeur de t a-t-on $p(T \leq t) = 0,812$? on obtient par lecture inverse de la table $t \approx 0,92$.
Dans le cas général, pour T suivant la loi normale $N(m;\sigma)$, on utilise la loi centrée réduite $T' = \dfrac{T-m}{\sigma}$;
Reprenons l'exemple $T \propto N(3,2)$, on cherche t tel que $p(T \leq t) = 0,812$. On a $T \leq t \Leftrightarrow T' = \dfrac{T-3}{2} \leq t'$ pour $t' = \dfrac{t-3}{2}$, et dans ce cas $p(T \leq t) = p(T' \leq t')$. Par lecture inverse de la table, on a $t' \approx 0,92$, d'où $t = 2t' + 3 \approx 4,84$.

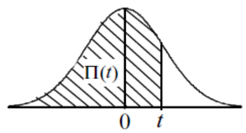
Extraits du formulaire utilisé dans les épreuves de mathématiques du BTS informatique de gestion

c) <u>Loi normale</u>

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\le t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$

CORRECTION

Partie A - Loi normale-

1. Soit X_1 qui suit la loi normale $N(90; 0,17)$. La variable $X' = \dfrac{X_1 - 90}{0,17}$ suit la loi normale $N(0;1)$.

Pour $x' = \dfrac{x-90}{0,17}$, on a l'équivalence : $89,6 \leq x \leq 90,4 \Leftrightarrow -\dfrac{40}{17} \leq x' \leq \dfrac{40}{17}$

On a $\dfrac{40}{17} \approx 2,35$.

La lecture de la table de la loi normale donne

$$p(-2,35 \leq X' \leq 2,35) = 2 \times p(X' \leq 2,35) - 1 \approx 2 \times 0,9906 - 1 = 0,9812 \approx 0,98$$

On a donc $p(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) \approx 0,98$.

La probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production soit conforme est d'environ 0,98

2. Soit D une variable aléatoire suivant la loi normale $N(90; \sigma_1)$, où σ_1 est inconnu. On cherche σ_1 tel que $p(89,6 \leq D \leq 90,4) = 0,99$. La variable $D' = \dfrac{D-90}{\sigma_1}$ est centrée réduite et on a

$$p(89,6 \leq D \leq 90,4) = p\left(-\frac{0,4}{\sigma_1} \leq D' \leq \frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,99$$

Puisque $p\left(-\dfrac{0,4}{\sigma_1} \leq D' \leq \dfrac{0,4}{\sigma_1}\right) = 2p\left(D' \leq \dfrac{0,4}{\sigma_1}\right) - 1 = 0,99$, on obtient $p\left(D' \leq \dfrac{0,4}{\sigma_1}\right) = \dfrac{1,99}{2} = 0,995$.La lecture de la table de la loi normale nous permet d'encadrer : $2,57 \leq \dfrac{0,4}{\sigma_1} \leq 2,58$, ce qui donne $\dfrac{0,4}{2,58} \leq \sigma_1 \leq \dfrac{0,4}{2,57}$, et les valeurs approchées : $0,1550 \leq \sigma_1 \leq 0,1557$. Une valeur approchée de σ_1 est donc $0,16$.

Partie B - Loi binomiale-

1. L'expérience consistant à prélever une rondelle et à regarder si elle est ou non défectueuse est une expérience de Bernoulli : c'est une expérience aléatoire avec deux issues possibles, défectueux avec une probabilité 0,02 et non défectueux avec une probabilité 0,98. Notons Y la variable aléatoire correspondante. Cette expérience est répétée 4 fois. Le prélèvement étant assimilé à un tirage avec remise, on peut considérer qu'il y a indépendance des tirages. La variable aléatoire Y_1 est donc la somme du résultat obtenu pour Y en répétant 4 fois le tirage de façon indépendante. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,02$.

2. La probabilité qu'aucune rondelle ne soit défectueuse est :

$$p(Y_1 = 0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} 0,02^0 \times 0,98^4 = 0,98^4 \approx 0,922$$

3. La probabilité qu'au plus une rondelle soit défectueuse est :

$$p(Y_1 \leq 1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} 0,02^0 \times 0,98^4 = 0,98^4 \approx 0,922$$