MASTER MPCE. PROBLEME DU 23/9/2010
CORRIGE ALGEBRE LINEAIRE.

Partie A.

1. Montrons que $d(f) \in E$. Pour $f \in E$, on a $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$, alors $f(x-1) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k (x-1)^k$ est la somme des polynômes $(x-1)^k$ de degré inférieur à n c'est donc un élément de Ei.
Soit $f_1, f_2 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors
$$\begin{aligned} d(\lambda f_1 + \mu f_2)(x) &= (\lambda f_1 + \mu f_2)(x) - (\lambda f_1 + \mu f_2)(x-1) \\ &= \lambda f_1(x) - \lambda f_1(x-1) + \mu f_2(x) - \mu f_2(x-1) \\ &= (\lambda d(f_1) + \mu d(f_2))(x) \end{aligned}$$
ce qui montre la linéarité de d.
2. On a
$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= x \\ f_2(x) &= (x+1)x \end{aligned}$$
Pour $p \geq 1$ supposons $f_p(x) = (x+p-1)(x+p-2)\cdots x$ alors $f_{p+1}(x) = (x+p)f_p(x) = (x+p)(x+p-1)(x+p-1)\cdots x$ d'où l'expression de f_p en fonction de x et p.
3. Montrons que le système $f_0, f_1, \ldots, f_n$ est libre. Supposons qu'il existe $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tel que $0 = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$ Alors le degré de f_k étant k pour tout $0 \leq k \leq n$ on a $a_n = 0$ puisque coefficient de x^n. Le coefficient de x^{n-1} qui est alors a_{n-1} est nul également. En itérant le procédé, tous les a_k sont nuls et le système $f_0, f_1, \ldots, f_n$ est libre c'est donc une base puisque $dim(E) = n+1$.
4. On a
$$\begin{aligned} d(f_p)(x) \quad & [(x+p-1)(x+p-2)\cdots(x+1)x] - [(x+p-2)(x+p-3)\cdots x(x-1) \\ &= [(x+p-1)-(x-1)][(x+p-2)\cdots x] \\ &= p f_{p-1}(x) \end{aligned}$$
La (p+1)ème colonne de la matrice de d dans la base $f_0, f_1, \ldots, f_n$ est donnée par les coordonnées de f_p dans cette base, c'est-à-dire
$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right\}$$
5. La première colonne est nulle donc le rang de cette matrice d'ordre $n+1$ est a plus n. La matrice extraite en enlevant la première colonne et la dernière ligne est diagonale et toute les entrées sur la diagonale sont non nulles donc elle est inversible et de rang n. Il en résulte que le rang de la matrice de départ est n.

Le rang est la dimension de l'image qui admet $f_0, f_1, \dots, f_{n_1}$ comme base. Toute combinaison de ces n vecteurs est un polynôme de degé inférieur ou égal à $n-1$. Donc l'image de d est un sous espace de dimension n de l'espace des polynômes de degé inférieur ou égal à $n-1$. Comme ce dernier espace est aussi de dimension n, l'image est tout l'espace des polynômes de degé inférieur ou égal à $n-1$.
La dimension du noyau est la dimension de l'espace de départ moins la dimension de l'image, donc ici $dim(\ker d) = 1$. Comme $d(f_0) = 0$, (se voit immédiatement sur la matrice) le noyau est engendré par f_0 c'est donc les constantes.

6. pour $f, g \in E$ la relation $d(f) = d(g)$ implique $d(f-g) = 0$ donc $f-g = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = g(x) + \alpha$
7. Pour tout x, on a $d(f)'(x) = f'(x) - f'(x-1) = d(f')(x)$ c'est-à-dire $d(f') = (d(f))'$

Partie B :Application.

Calcul de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k^2$. On suppose $n \geq 3$.

1. L'image de d est l'espace des polynômes de degré $n-1 \geq 2$ donc contient les fonctions $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $a(x) = x$ et $b(x) = x^2$.
   Donc il existe $f, g \in E$ tel que $d(f) = a$, $d(g) = b$ et on sait d'après A, que f et g sont alors déterminées à une constante arbitraire près. Prendre la valeur en 0 détermine cette constante. Donc la relation $f(0) = g(0) = 0$ détermine f, g de manière unique.
2. Faisons $x = 0$ dans $d(f)(x) = f(x) - f(x-1) = x$ on obtient $f(-1) = 0$. De même pour g.
3. De $df(n) = f(n) - f(n-1) = a(n) = n$ on déduit
   $$f(n) = n + f(n-1) = n + (n-1) + f(n-2) = n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$
   La même méthode donne la relation $S = g(n)$.
4. De $d(g') = (d(g))' = b' = 2a = 2d(f) = d(2f)$ on déduit $g' = 2f + g'(0)$ et donc $g(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)dt + xg'(0)$.
   Comme $g(-1) = 0 = 2\displaystyle\int_0^{-1} f(t)dt - g'(0)$ on obtient $g'(0) = 2\displaystyle\int_0^{-1} f(t)dt$ et donc $g(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)dt + 2x\int_0^{-1} f(t)dt$ ce qui est la relation cherchée.
5. De même on a $d(f') = d(f)' = a' = 1 = x - (x-1) = d(x)$ et donc $f' = x + f'(0)$ et $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + xf'(0)$.
   De plus $0 = f(-1) = \dfrac{1}{2} - f'(0)$ d'où $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2}$.
   On a $g(x) = 2\displaystyle\int_0^x \frac{t^2+t}{2}dt + 2x\int_0^{-1} \frac{t^2+t}{2}dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$
6. On a $S = g(n) = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6}$.