MASTER MPCE
Entraînement de mathématiques : devoir 2

A rendre pour le 25 août 2010
Vos réponses RÉDIGÉES doivent être envoyées par mail à :
legrand@math.univ-toulouse.fr
Conseil de travail : Il est très important pour préparer le concours de prendre soin de la rédaction qui doit être la plus claire possible

PARTIE 1 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

Extrait du programme du concours sur les équations différentielles.
a) Définition sur un intervalle d'une solution d'une équation différentielle de la forme $y' = f(x, y)$ courbe intégrale (aucun théorème d'existence n'est au programme).
b) équation différentielle linéaire du premier ordre $ay' + by = c$ où a, b, c sont des fonctions numériques continues sur un même intervalle. Recherche, sur un intervalle où a ne s'annule pas, de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée.
c) équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, dont le second membre est de la forme $e^{mt}P(t)$, P étant un polynôme et m un réel ou un complexe.

Exercices de révision.

Exercice 1.

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$xy' + 2y = \frac{1}{1+x^2}. \tag{1}$$

On suppose $x > 0$.

1. Résoudre $xy' + 2y = 0$.
2. Trouver une solution particulière de (1) par la méthode de la variation de la constante.
3. Donner toutes les solutions de (1) définies pour $x > 0$.
4. Quelles sont les solutions $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de (1) vérifiant $y(1) = 1$.

Exercice 2.

On donne une solution $y_1(x) = x$ de l'équation linéaire du second ordre à coefficients non constants

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0 \tag{2}$$

On suppose $x > 0$.

1. Soit y une solution de (2). On pose $y(x) = xz(x)$. Monter que la fonction z' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

2. Calculer $z(x)$ puis $y(x)$.

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre

$$y'' - 3y' + 2y = b(t)$$

1. Déterminer l'équation caractéristique. Calculer les solutions pour $b(t) = 0$
2. Trouver une solution particulière lorsque $b(t) = te^t$. Déterminer dans ce cas la solution $t \mapsto y(t)$ qui pour $t = 0$ vérifie $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$

PARTIE 2 : CALCUL MATRICIEL.

Extrait du programme du concours.
Matrices.
Espace vectoriel $M_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Isomorphisme entre les applications linéaires de K^q dans K^p et $M_{p,q}(K)$.
Produit matriciel, transposition. Algèbre $M_n(K)$; matrices inversibles ; groupe linéaire $GL_n(K)$.
Changement de base pour une application linéaire, matrice de passage.
éléments propres.
Valeurs propres, vecteurs propres pour une application linéaire.
Diagonalisation en dimension 2 ou 3.
Déterminant d'une matrice.
Calcul du déterminant d'une matrice en dimension 2 et en dimension 3.
Système d'équations linéaires. Pratique de la méthode de Gauss pour la résolution de systèmes d'équations

Exercice 2.

A toute matrice à coefficients réels

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où le coefficient c n'est pas nul, on associe la fonction homographique d'une variable réelle x

$$f_M(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

définie pour $x \neq -\dfrac{d}{c}$.
Notre objectif est de calculer la composition itérée

$$(f_M)^{\circ^n} = f_M \circ f_M \circ \cdots \circ f_M$$

(n facteurs)

1. Composition des fonctions homographiques et produit de matrices.
Soit la matrice $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.
Calculer $f_M(f_{M'}(x))$ et $f_{MM'}(x)$
En déduire $(f_M)^{\circ^n} = f_{(M^n)}$

2. Suite double récurrente.
On considère la suite double (u_n, v_n) définie pour $n \geq 0$ par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = au_n + bv_n \ ; \ v_{n+1} = cu_n + dv_n$$

(u_0, v_0) étant un couple donné de nombre réels.
Ecrire la relation précédente sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

où M_1 est une matrice qu'on exprimera en fonction de M.
En déduire la relation

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

3. Suite doublement récurrente.
On considère les suites (w_n) doublement récurrentes c'est-à-dire vérifiant la relation de récurrence

$$w_{n+2} = \alpha w_{n+1} + \beta w_n$$

dans laquelle α et β sont des réels fixés et w_0, w_1 sont des réels arbitraires.

a) Montrer que le choix de w_0, w_1 détermine entièrement la suite.
Montrer que l'ensemble des suites doublement récurrente est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Quelle est la dimension de cette espace vectoriel ?

b) Déterminer α et β en fonction de a, b, c, d pour que la suite doublement récurrente

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

u_0 donné, soit justement la suite u_n première coordonnée de la suite double du paragraphe précédent (on éliminera v_{n+1} dans $u_{n+2} = au_{n+1} + bv_{n+1}$ en utilisant $v_{n+1} = cu_n + dv_n$ puis v_n avec $u_{n+1} = au_n + bv_n$).

Dans la suite on prend la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que dans ce cas la relation de double récurrence satisfaite par la suite u_n associée est

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

c) Pour quelles valeurs du réel r la suite $u_n = r^n$ vérifie la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Déduire de la question a) que toute suite doublement récurrente vérifiant cette relation est de la forme $A + 2^n B$ où A, B sont des réels arbitraires qu'on déterminera en fonction de u_0, u_1.

d) Calculer v_0 en fonction de u_0, u_1 puis v_n en fonction de A, B pour que (u_n, v_n) soit une suite double récurrente associe à la matrice M comme dans la partie 2.

4. Puissance d'une matrice.
On utilise les résultats de la partie 3.

a) Déterminer la matrice N telle que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

b) Déduire de 2 et de a) la valeur de M^n dans le cas de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Déduire de ce qui précède $(f_M)^{\circ^n}$.

5. Diagonalisation et puissance.
Diagonaliser la matrice M et déduire directement M^n.

PARTIE 3 : PROBABILITÉS.

Si X est une variable aléatoire discrète, on définit son support D comme l'ensemble des k tels que $P(X = k) > 0$.

1) Pour chacun des deux cas suivants :

1. X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$, notée $B(n, p)$
2. X est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, notée $G(p)$

expliquer quel phénomène aléatoire est modélisé par la variable aléatoire X, donner sans justification le support D de X, la valeur de $P(X = k)$ pour tout $k \in D$, et effectuer le calcul de l'espérance mathématique $E(X)$.

2) Un rat est placé dans une cage qui comporte 5 portes dont une seule permet de sortir de la cage. Si le rat essaie de sortir par une mauvaise porte, il reçoit une petite décharge électrique.

a) on installe dans la cage un premier rat qui ne tient pas compte des décharges électriques reçues et choisit à chaque nouvel essai de manière équiprobable entre les 5 portes. On note X le nombre d'essais nécessaires pour que le rat sorte.
Déterminer le support D de X, pour tout $k \in D$ la valeur de $P(x = k)$, et calculer $E(X)$.

b) on remplace ce rat par un deuxième rat plus malin qui choisit de manière équiprobable entre les portes qu'il n'a pas essayées.
On note Y le nombre d'essais nécessaires pour que ce rat sorte.
Déterminer le support D de Y, pour tout $k \in D$ la valeur de $P(Y = k)$, et calculer $E(Y)$.

3) Une ville est composée de 10 quartiers, chaque quartier comprenant 10 habitations.

Une source de pollution est susceptible de polluer l'eau de chaque habitation.
On admet que chaque habitation a la même probabilité p d'être polluée.
On effectue un prélèvement pour chacune des 100 habitations.
Plutôt que de tester les 100 prélèvements, le maire préconise la méthode suivante :

1. Chaque prélèvement est divisée en 2 parties. Les premières parties sont mélangées quartier par quartier, et on obtient ainsi un échantillon par quartier.
2. On teste chacun des 10 échantillons de quartier. On admet que la pollution est révélée dans un de ces échantillons si et seulement si l'eau d'au moins un des appartements du quartier est polluée. Si c'est le cas, on utilise la deuxième partie des prélèvements pour tester l'eau de chaque habitation du quartier. Si ce n'est pas le cas, l'eau de chaque habitation du quartier est considérée comme non polluée.

On note X le nombre de quartiers dont le test a révélé la pollution et T le nombre total de tests effectués.
a) Remarquer que $T = aX + b$ où a et b sont des constantes à déterminer.

b) Démontrer que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
En déduire, en fonction de p, l'espérance mathématique de X et celle de T.

c) Déterminer les valeurs de p pour lesquelles la méthode préconisée par le maire est, en moyenne, plus économique que le test des 100 prélèvements.