UPS-IUFM Master MPCE, mathématiques
MH Lécureux

mercredi 6 octobre, 13 octobre et jeudi 14 octobre 2010

PROBLÈME ENCADRÉ 3

Avant de commencer : quelle est la définiton de transformation du plan ? quelles sont les isométries ? quelles sont les autres transformations présentes dans les programmes actuels du lycée ? que diriez vous à un élève qui demande si une transformation du plan transforme toujours une droite en une droite ?

Exercice 1 *On considère un triangle ABC et P un point quelconque du plan. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, et Δ_A, Δ_B et Δ_C les droites passant respectivement par A, B, et C et parallèles à $(PA'), (PB')$ et (PC'). On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC et par h l'homothétie de centre G et de rapport -2.*

1. Démonter que les droites Δ_A, Δ_B et Δ_C sont concourantes en un point que l'on notera Q.

2. Démontrer que si P est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC alors Q est l'orthocentre du triangle. En déduire que le centre de gravité G, l'orthocentre Q et le centre P du cercle circonscrit à un triangle sont alignés. Montrer :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

Exercice 2 *Soit ABC un triangle.*
Problème : on veut construire un carré $DEFG$ inscrit dans le triangle ABC (ses sommets sont sur les côtés du triangle, D et E appartiennent à $[AB]$). Pour cela, on va utiliser une technique par abandon de contrainte.

1. *Faire la figure, et placer deux points F et G tels que $AFGB$ est un carré, qui n'est pas dans le même demi-plan limité par (AB) que le point C.*
2. *Soit I l'intersection de (AB) et (CF) et J l'intersection de (AB) et (CG). Soit h l'homothétie de centre C qui transforme F en I. Déterminer $h(G)$.*
3. *Sur la figure de départ tracer l'image du carré $AFGB$ par h. A-t-on répondu au problème de construction posé ?*

Peut-on envisager le même type de raisonnement avec $AFGB$ dans le même demi-plan limité par (AB) que le point C ?

Exercice 3 *Le plan est orienté. Soient A, B, C trois points non alignés tels que ABC est un triangle direct. On désigne respectivement par D et E les points tels que ACE et ADB sont directs, rectangles et isocèles en A. Le point O est le milieu de $[BC]$.*

Construire le point F symétrique du point C par rapport à A.

Montrer que les droites (AO) et (DE) sont perpendiculaires et que $DE = 2AO$ par deux méthodes différentes : l'une utilisant les transformations (rotation de centre A et homothétie de centre C), l'autre les nombres complexes.

Exercice 4 *Soit $ABCD$ un parallélogramme, par un point M de (AC) on mène la parallèle à (BC) qui coupe (AB) en I et (CD) en J, et la parallèle à (AB) qui coupe (BC) en K et (AD) en L .*

1. Prouver que les droites (IL), (KJ) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrer que les droites (IK), (JL) et (AC) sont concourantes ou parallèles.

Exercice 5 *Soit ABC un triangle, et soit I le pied de la bissectrice intérieure issue de A.*
Déterminer le lieu de I lorsque A et B sont fixes et C décrit un cercle de centre A.

Exercices tirés de la banque des sujets zéro proposés par le ministère

Un enseignant d'une classe de baccalauréat industriel a préparé une séquence de trois séances portant sur le flocon de Von Koch.
Pour chacune de ces trois séances, chaque partie de l'exercice commence par les instructions et/ou questions destinées aux élèves puis sont énoncées les questions destinées aux candidats du concours.

Première séance : figure de base du flocon de Von Koch

La première séance de la séquence consiste à faire travailler les élèves sur un logiciel de géométrie dynamique. L'enseignant donne aux élèves les consignes suivantes :

Séance 1 : Macro de la figure de base de Von Koch

1. Placer deux points distincts A et B.
2. Construire le point C image du point B par la rotation de centre A et d'angle 60°.
3. Construire le centre de gravité G du triangle ABC.
4. La parallèle à [AC] passant par G coupe le segment [AB] en F.
5. La parallèle à [BC] passant par G coupe le segment [AB] en H.
6. Créer le segment [AF], puis les segments [FG], [GH], [HB].
7. Masquer tout ce qui a été dessiné sauf les segments [AF], [FG], [GH] et [HB].
8. Enregistrer la macro permettant de faire correspondre aux points A et B la ligne brisée AFGHB.

Questions destinées aux candidats du concours

Question 1

Dessiner sur la copie la figure que doivent finalement obtenir les élèves à l'écran ; vous y ferez apparaître en plus les noms des points A, F, G, H et B.

Question 2

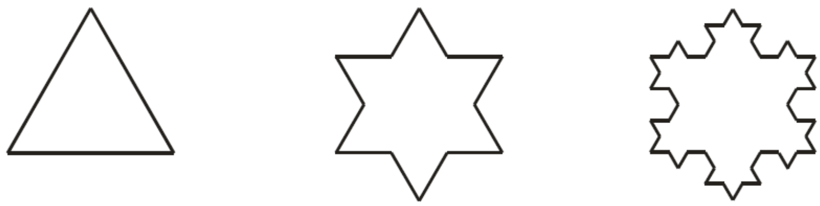
Montrer que les segments [AF], [FG], [GH] et [HB] sont de même longueur égale au tiers de la longueur du segment [AB].

Deuxième séance : construction et étude des premiers flocons

Durant cette séance, les élèves doivent d'abord construire des flocons à l'aide du logiciel de géométrie et de la macro enregistrée lors de la première séance, puis répondre à une série de questions.

1) Construction de flocons avec un logiciel de géométrie dynamique

Le professeur donne aux élèves les renseignements suivants :
Le « flocon de rang 0 » est un triangle équilatéral de 9 cm de côté.
Le flocon de rang 1 (voir figure ci-après) est obtenu en appliquant trois fois au flocon de rang 0 la macro enregistrée à l'issue de la première séance.
Le flocon de rang 2 (voir figure ci-après) est obtenu en appliquant douze fois au flocon de rang 1 la macro enregistrée à l'issue de la première séance.



flocon de rang 0 flocon de rang 1 flocon de rang 2

Le flocon de Von Koch est la « limite » des flocons obtenus, lorsqu'on répète indéfiniment les étapes mentionnées ci-dessus.

2) Étude des premiers flocons

L'enseignant souhaite que ses élèves réfléchissent aux questions ci-dessous à l'aide des figures qu'ils ont réalisées.

Soit C_n le nombre de côtés du flocon de rang n.
Soit L_n la longueur d'un côté du flocon de rang n.
Soit P_n le périmètre du flocon de rang n.

1) Remplir le tableau suivant

Rang n	**Nombre de côtés C_n**	**Longueur d'un côté L_n**	**Périmètre du flocon P_n**
0	3	9	
1			
2			

2) Comment pourrait-on procéder pour calculer le périmètre du flocon de rang 6 ?

Question destinée aux candidats du concours

Question 3 : Préciser la nature de chacune des suites $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Troisième séance : étude des caractéristiques des flocons

L'enseignant a réalisé sur un tableur le tableau ci-dessous et le projette à ses élèves puis en discute avec eux.

	A	B	C	D
1	rang *n*	nombre de côtés C*n*	longueur d'un côté L*n*	périmètre du flocon P*n*
2	0	3	9	27
3	1	12	3	36
4	2	48	1	48
5	3	192	0,33333333	64
6	4	768	0,11111111	85,3333333
7	5	3072	0,03703704	113,777778
8	6	12288	0,01234568	151,703704
9	7	49152	0,00411523	202,271605
10	8	196608	0,00137174	269,695473
11	9	786432	0,00045725	359,593964
12	10	3145728	0,00015242	479,458619

Questions destinées aux candidats du concours

Question 4 concernant l'évolution du périmètre d'un flocon :

a) Quelle est la limite du périmètre P_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier le résultat.

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que le flocon de rang n ait un périmètre supérieur ou égal à 9 km (on rappelle qu'on part d'un triangle de côtés mesurant 9 cm).

Question 5 concernant l'évolution de l'aire du domaine délimité par un flocon :

On note $\mathcal{A}_n$ l'aire, exprimée en cm², du domaine délimité par le flocon de rang n.

a) Que vaut $\mathcal{A}_0$ (on rappelle qu'on part d'un triangle équilatéral de côtés de longueur 9 cm) ?

b) Obtenir une formule exprimant l'aire $\mathcal{A}_{n+1}$ en fonction de l'entier naturel n et de l'aire $\mathcal{A}_n$.

c) En déduire une valeur approchée de $\mathcal{A}_6$ au millimètre carré près.

Exercice

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré trois fois de suite dont les faces sont numérotées de 1 à 6 de telle sorte que :

- Si la face « 4 » apparaît trois fois, le gain du joueur est 3€ ;
- Si la face « 4 » apparaît deux fois, le gain du joueur est 2€ ;
- Si la face « 4 » apparaît une fois, le gain du joueur est 1€ ;
- Si la face « 4 » n'apparaît aucune fois, le joueur perd 1€.

1. Simulation de l'expérience

On simule à l'aide d'un tableur cette expérience pour des échantillons de taille 100, puis 1000 et 10000.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1er lancer	2^e lancer	3^e lancer	Nombre de 4	Gain		Moyenne des gains (100 parties)
2	1	4	5	1	1		0.02
3	3	1	4	1	1		
4	5	5	2	0	-1		Moyenne des gains (1000 parties)
5	6	3	2	0	-1		-0,03
6	3	3	4	1	1		
7	1	2	5	0	-1		Moyenne des gains (10000 parties)
8	6	4	4	2	2		-0,07
9	5	5	4	1	1		
10	4	2	2	1	1		
11	2	1	6	0	-1		

a. Quelle formule a-t-on entré dans la cellule A2 pour obtenir un chiffre au hasard compris entre 1 et 6 ?

b. Quelle formule a-t-on entré dans la cellule D2 pour comptabiliser le nombre de 4 obtenu lors des trois lancers ?

c. Quelle formule a-t-on entré dans la cellule E2 pour trouver le gain à l'issue de la partie ?

On a calculé la moyenne des gains des 100 premières parties en G2, des 1000 parties en G5 et des 10000 parties en G8.

2. Modélisation de l'expérience

Une issue de l'expérience est une suite formée des trois numéros obtenus, par exemple : 163, 424, 512, 554,… On choisit la loi équirépartie sur l'ensemble des issues.

a. Combien l'expérience comporte-t-elle d'issues ?

b. La seule issue 444 conduit à un gain de 3€. Expliquer pourquoi 15 issues conduisent à un gain de 2€ et 75 issues conduisent à un gain de 1€.

c. On note X la variable aléatoire qui donne le gain du joueur. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance.

3. Comparaison des résultats

Comparer les résultats obtenus dans les questions 1 et 2.