1. Q.C.M.

Dans tout ce qui suit, sauf contre-indication, $(a_n)_n$ désigne une suite de nombres réels.

(1) • La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge dès que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

`C'est faux !` $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ `mais la série harmonique` $\sum_n 1/n$ `diverge.`

(2) • Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

`C'est vrai, c'est le cours.`

(3) • La série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n^2)$ converge.

`C'est vrai car` $\sin(1/n^2) \sim 1/n^2 > 0$ `: on peut donc appliquer le théorème sur les équivalents pour affirmer que la série` $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n^2)$ `converge.`

(4) • La série $\sum_{n=1}^{\infty} cos(1/n^2)$ converge.

`C'est faux car son terme général ne tends pas vers zéro.`

(5) • Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ est aussi convergente.

`C'est vrai car si` $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ `converge alors` $\lim_n a_n = 0$ `et par conséquent` $0 \leq a_n \leq 1$ `pour` $n \geq n_0$ `; mais alors` $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ `pour tout` $n \geq n_0$`, le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet alors de conclure.`

(6) • Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ est aussi convergente.

`C'est faux, considérer` $a_n = 1/n^2$.

(7) • Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + a_n}{3^n + a_n}$ converge.

`C'est vrai car si` $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ `converge alors` $\lim_n a_n = 0$ `et alors` $\frac{2^n+a_n}{3^n+a_n} \sim \frac{2^n}{3^n} > 0$ `terme général d'une série géométrique convergente : le théorème de comparaison pour les séries de signe constant assure alors la convergence de la série initiale.`

(8) • Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+a_n}{2+a_n}$ converge.

`C'est faux : comme dans la question précédente` $\lim_n a_n = 0$ `donc` $\lim_n \frac{1+a_n}{2+a_n} = 1/2 \neq 0$ `: la divergence est donc grossière.`

(9) • La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{5+n}$ converge et a pour somme $1/5$.

`C'est faux car` $\lim_n \frac{1+n}{5+n} = 1/5 \neq 0$ `: la divergence est donc grossière.`

(10) • La série $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4^{-n+1}$ converge et a pour somme 1.

`C'est faux. La convergence est immédiate via d'Alembert par exemple, et pour la somme :`
$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4^{-n+1} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{3}{1-1/4} = 4$.

(11) • Si la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\geq 1}$ de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est majorée, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

C'est faux : penser à la série grossièrement divergente $\sum_n (-1)^n$ dont les sommes partielles valent 0 ou 1 et sont donc bornées.

(12) • Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et si la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\geq 1}$ de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est bornée, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

C'est maintenant vrai car si la série est à termes positifs, la suite des sommes partielles est croissante et par conséquent converge si et seulement si elle est bornée.

(13) • Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

C'est faux, la décroissance vers zéro est essentielle dans le théorème des séries alternées (considérer par exemple $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ qui est divergente).

(14) • Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ convergente.

C'est vrai car $0 \leq |(-1)^n a_n| \leq a_n$ on peut donc appliquer le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

(15) • Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

C'est faux, considérer $a_n = 1/n$.

(16) • Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ est décroissante et si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

C'est vrai, c'est le théorème des séries alternées.

(17) • Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)$ converge.

C'est faux car $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge implique que $\lim_n a_n = 0$ qui implique que $\lim_n \cos(a_n) = 1$: la série $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)$ est donc grossièrement divergente.

(18) • Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ converge.

C'est vrai car alors $\sin(a_n) \sim a_n > 0$.

(19) • $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2011} < 1$.

C'est vrai : on reconnait la série géométrique de raison $1/2$ donc convergente et comme les coef sont positifs : $0 < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2011} < \sum_{n\geq 1} 2^{-n} = 1$.

(20) • La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n^6+1)}$ converge.

C'est faux car $\frac{1}{\log(n^6+1)} \sim \frac{1}{6\log(n)} > 0$ d'où la diverge par les théorèmes de comparaison.

(21) • La série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ converge.

C'est faux car $\lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1/e \neq 0$: la divergence est même grossière.

(22) • La série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge.

C'est vrai car vu la question précédente, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \sim e^{-n} > 0$ terme général d'une série positive géométrique de raison $0 < 1/e < 1$ donc convergente : on conclut via le théorème de comparaison.

(23) • Si $a_n \leq b_n \leq 0$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

C'est vrai car alors $0 \leq -b_n \leq -a_n$ et appliquer le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

(24) • Si $a_n \leq b_n \leq 0$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

C'est faux, prendre par exemple $a_n = -1/n$ et $b_n = -1/n^2$.

(25) • Si $0 \leq a_n \leq b_n$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

C'est vrai : c'est le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

(26) • Si $0 \leq a_n \leq b_n$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

C'est vrai c'est encore le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

(27) • $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right) = \frac{1}{7}$.

C'est faux : $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \cdots = \frac{1}{4}$.

(28) • $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{-n} = 2$.

C'est vrai car pour $|x| < 1$: $\sum_n x^n = \frac{1}{1-x}$ donc $\sum_n nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$ donc en faisant $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{-n} = 2$.

(29) • $0.99999 \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 1$.

C'est vrai $0.99999 \cdots = 9 \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = 9 \cdot \frac{1}{1-1/10} = 1$.

(30) • Si la suite $(a_n)_n$ n'est pas convergente, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

C'est faux, considérer par exemple la série harmonique.

(31) • Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge alors la suite $(a_n)_n$ n'est pas convergente.

C'est faux, considérer par exemple la série harmonique.

(32) • Si $a_n > 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$.

C'est faux, considérer $a_n = 1/n^2$ qui donne $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

(33) • Si $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

C'est faux, il manque ici la positivité, considérer par exemple $a_n = (-1)^n e^n$ par laquelle $a_{n+1}/a_n = -e < 1$.

(34) • Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge alors $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

C'est faux, penser à $a_n = (1)^n/n$.

(35) • Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+n^2}$ converge.

C'est vrai la suite $(a_n)_n$ étant bornée il existe $M > 0$ tel que pour n assez grand : $\left|\frac{a_n}{a_n+n^2}\right| \leq \frac{M}{n^2-M} \geq 0$ appliquer ensuite le théorème de comparaison.

(36) • Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n+n^2}$ converge.

C'est vrai car alors $\frac{1}{a_n+n^2} \sim 1/n^2 > 0$ et on peut appliquer le théorème de comparaison.

(37) • Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{a_n+n^2}$ diverge.

C'est faux car alors $\frac{\sqrt{n}}{a_n+n^2} \sim 1/n^{3/2} > 0$ terme général d'une série convergente, on peut appliquer le théorème de comparaison.

(38) • Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n+n^2}$ diverge.

C'est vrai car alors $\frac{n}{a_n+n^2} \sim 1/n > 0$ terme général d'une série divergente, on peut appliquer le théorème de comparaison.

2. PREMIER PROBLEME

Lucas et Julia jouent à un jeu : pour jouer une partie de ce jeu ils tirent aléatoirement un entier n strictement positif suivant une certaine loi de probabilité

– si cet entier n est impair alors Lucas gagne et Julia donne à Lucas n euros, on considère alors que le gain de Lucas est $+n$.

– si n est pair Julia gagne et Lucas donne alors n euros à Julia, on considère alors que le gain de Lucas est $-n$.

On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre tiré aléatoirement et par $g(n)$ le gain de Lucas lorsque $X = n$.

(1) Préliminaires.

(a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$1 - x + x^2 + \cdots + (-x)^{n-1} - \frac{1}{1+x} = -\frac{(-x)^n}{1+x}$$

(c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} - \log(1+x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$$

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\left| \log(2) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

(e) En déduire que $\log(2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

(2) Dans toute cette question la loi de probabilité de X est donnée par

$$P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)},\ n \in \mathbb{N}^\star,$$

où λ est une constante réelle.

(a) Calculer λ.

(b) Expliciter $g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

(c) Quelle est la probabilité que Lucas gagne une partie ?

(d) Montrer que $\sum_{n\geq 1} g(n) \cdot P(X = n) = 1 - \log(2)$.

(e) Que représente la série précédente ?

(f) Lucas et Julia font deux parties successives. On désigne par Y la variable aléatoire représentant le gain cumulé de Lucas à l'issue de ces deux parties.

(i) Déterminer $P(Y = 0)$.

(ii) Déterminer $P(Y = 1)$.

(iii) Expliciter toutes les issues possibles des deux jeux si $Y = 2$.

(iv) Montrer que $\dfrac{1}{2k(2k+1)^2(2k+2)} = \left(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{2k+1}\right)\left(\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+2}\right)$

(v) On rappelle que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$ calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(vi) Déduire de tout ce qui précède que $P(Y = 2) = \frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{4}$.

(3) On suppose maintenant que la loi de probabilité de X est donnée par

$$P(X = n) = \frac{\mu}{2^n},\ n \in \mathbb{N}^\star,$$

où μ est une constante réelle.

(a) Calculer μ.

(b) Quelle est la probabilité que Lucas gagne une partie ?

(c) Nature et somme de la série $\sum_{n\geq 1} g(n) \cdot P(X = n)$.

(d) Lucas et Julia font, comme dans la question 2-f deux parties successives. On désigne à nouveau par Y la variable aléatoire représentant le gain cumulé de Lucas à l'issue de ces deux parties.

(i) Que vaut la probabilité de l'événement $Y \geq 0$?

(ii) Sachant que $Y \geq 0$ quelle est la probabilité que Lucas ait gagné les deux parties ?

CORRIGE DU PREMIER PROBLEME.

(1) (a) C'est le thèorème des séries alternées car $1/k+1$ décroit vers 0.

(b) Il n'y a qu'à appliquer la formule donnant la sommes des n premiers termes d'une série géométrique.

(c) Il n'y a qu'à intégrer la formule précédente sur $[0,x]$.

(d) On fait $x=1$ dans la formule précédente et on remarque que $\left|\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt\right| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

(e) En déduire que $\log(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Faire tendre n vers l'infini dans la formule précédente.

(2) (a) Nous devons avoir $\sum_{n\geq 1} P(X=n) = 1$ soit aprés télescopage puisque $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$: $\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda}{n(n+1)} = \lambda \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lambda$ et par conséquent $\lambda = 1$.

(b) Vu la règle du jeu : $g(n) = \begin{cases} 2p+1, & \text{si } n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}, \\ -2p, & \text{si } n = 2p,\ p \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$ soit encore $g(n) = (-1)^{n+1} n$.

(c) Lucas gagne la partie si on tire un chiffre impair i.e.

$$P(\text{lucas gagne}) = \sum_{n\geq 0} P(X = 2n+1) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log(2).$$

(d) $\sum_{n\geq 1} g(n) \cdot P(X=n) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} n}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = 1 - \log(2)$ vu 1-e.

(e) C'est l'espérance de la variable aléatoire g définie sur $\mathbb{N}^\star$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui représente le gain de Lucas à l'issue de la partie.

(f) (i) Cet événement est impossible : $P(Y=0) = 0$.

(ii) Cet événement correspond à l'unique tirage $(1,1)$ soit (les tirages sont indépendants) : $P(Y=2) = P(X=1)^2 = 1/4$.

(iii) Il s'agit des tirages $(2,3),(3,2),(4,5),(5,4),\ldots,(2k,2k+1),(2k+1,2k),\ldots$

(iv) Il suffit de se souvenir que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ et d'écrire $\frac{1}{2k(2k+1)^2(2k+2)} = \frac{1}{2k(2k+1)\cdot(2k+1)(2k+2)}$.

(v) C'est classique on écrit $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ soit $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(vi) Avec les deux questions précédentes nous avons :

$$\begin{aligned}
P(\{Y=1\}) &= P\{(2,3),(3,2),(4,5),(5,4),\ldots,(2k,2k+1),(2k+1,2k),\ldots\}) \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty} P((2k,2k+1)) \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k)\cdot P(X=2k+1) \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)\cdot(2k+1)(2k+2)} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) \\
&= 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+2)}\right) \\
&= 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} - \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)\right) = 2\left(\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{8} + 1\right) = \frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

(3) (a) Comme plus haut : $1 = \sum_{n\geq 1} P(X=n) = \mu \sum_{n\geq 1} 2^{-n} = \mu$, donc $\mu = 1$.

(b) Lucas gagne la partie si on tire un chiffre impair i.e.

$$P(\text{lucas gagne}) = \sum_{n\geq 0} P(X=2n+1) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n} = \frac{2}{3}.$$

(c) La série converge et on a (voir le QCM question 28 pour les détails) : $\sum_{n\geq 1} g(n)\cdot P(X=n) = \sum_{n\geq 1} \frac{n(-1)^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{9}$.

(d) (i) $Y \geq 0$ c'est ou bien Lucas gagne aux deux tirages, ou bien il gagne seulement lors d'un tirage et il faut qu'au tirage perdant le nombre pair tiré soit inférieur au nombre impair du tirage gagnant i.e. $\{Y \geq 0\} = \{(\texttt{gagne, gagne})\} \cup \cup_{n\geq 1} A_n$ où $A_n := \{(2n+1, 2k),\ (2k, 2n+1)\ :\ 1 \leq k \leq n\}$. Soit, vu ce qui précède, l'indépendance des tirages et le fait que ces événements soient deux a deux disjoints :

$$\begin{aligned}
P(\{Y \geq 0\}) &= P(\{(\texttt{gagne, gagne})\}) + \sum_{n\geq 1} P(A_n) \\
&= \frac{4}{9} + 2\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n} P(2n+1)P(2k)\right) = \frac{4}{9} + 2\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2n+1+2k}}\right) \\
&= \frac{4}{9} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{2n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k}\right) = \frac{4}{9} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{2n+1}}\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \\
&= \frac{4}{9} + \frac{2}{3}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{2n+1}} - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{2n+1}4^n}\right) \\
&= \frac{4}{9} + \frac{2}{6}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4^n} - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{16^n}\right) \\
&= \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-1/4} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-1/16}\right) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} - \frac{1}{16}\cdot\frac{16}{15}\right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{45} = \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

(ii) Avec la formule de Bayes c'est du tout cuit :

$$P(\{Y \geq 0\}/\{\texttt{Lucas gagne}\}) = \frac{P(\{Y \leq 0\} \cap \{\texttt{Lucas gagne}\})}{P(\{Y \geq 0\})} = \frac{P(\{\texttt{Lucas gagne}\})}{P(\{Y \geq 0\})} = \frac{5}{6}.$$

3. SECOND PROBLEME

L'objet de ce problème est d'utiliser les séries numériques pour obtenir des approximations de π.

(1) Pour $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$.

(a) Etudier suivant les valeurs de t la nature (convergente ou divergente) de la **suite** $(u_n)_{n\geq 0}$; dans le cas de la convergence, préciser la limite.

(b) Pour quels réels $t \in \mathbb{R}_+$ la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle décroissante ?

(c) Préciser la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}_+$.

(d) Préciser la nature de la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}_+$.

(e) Pour quels réels $t \in \mathbb{R}_+$ la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ converge-t-elle absolument ?

(f) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$.

(g) Montrer que que pour tout $t \in [0,1]$: $\arctan(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$.

(h) Déduire de ce qui précède et comme dans le problème précédent que $\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

(i) Combien faut-il calculer de termes dans la série précédente pour obtenir une estimation de π à 10^{-3} prés ?

(2) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ on considère maintenant les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, on admettra (voir la fin du problème) que

$$(\bigstar) \qquad \pi = 6 \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

et on posera

$$v_n := \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad R_n = 6 \sum_{k\geq n+1} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}, \quad R'_n = 6 \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{2^{2k+1}}.$$

(a) Pour $t > 0$ écrire plus simplement $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

(b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (pour $t = 1$ vous pouvez utiliser la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).

(c) Montrer que pour $0 < t < 1$ la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

(d) En déduire que $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) Justifier la convergence de la série plus haut définissant π ainsi que les deux restes R_n et R'_n.

(f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $0 \leq R_n \leq R'_n$.

(g) En déduire le nombre de termes a calculer dans la série $(\bigstar)$ pour obtenir une estimation de π à 10^{-3} prés. Donner cette estimation sous la forme d'une fraction.

(3) Terminons en montrant la formule $(\bigstar)$: faire $x = 1/2$ dans le développement en série entière de arcsin valable sur $]-1,1[$:

$$\arcsin(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

4. CORRIGE DU SECOND PROBLEME

(1) (a) Pour $|t| \leq 1$ on a $|u_n| \leq 1/2n+1$ et la suite converge donc vers zéro. Pour $|t| > 1$ on a $\lim_n |u_n| = +\infty$.

(b) Pour $t \in \mathbb{R}_+^\star$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = t^2 \cdot \frac{2n+1}{2n+3}$, la suite est donc décroissante pour tout $0 < t \leq 1$.

(c) Vu ce qui précède, la série diverge grossièrement pour $t > 1$, diverge pour $t = 1$ puisqu'alors $u_n = \frac{1}{2n+1}$ et converge pour $0 < t < 1$, par exemple parce que $\lim_n \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = t^2 < 1$.

(d) Vu la question précédente, la nature de la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ est seulement douteuse pour $t = 1$, mais dans ce cas le théorème des séries alternées assure sa convergence.

(e) Vu la question précédente, la convergence est absolue seulement pour $t \in]0,1[$.

(f) Il suffit d'appliquer la formule donnant la somme des n premiers termes de la série géométrique de raison $-x^2$.

(g) On raisonne comme dans la question 1 du problème précédent : si on intègre l'identité $\dfrac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = -\dfrac{(-1)^{2n+1}t^{2n+1}}{1+t^2}$ entre 0 et x il vient :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} - \sum_{k=0}^n \int_0^x (-1)^k t^{2k} dt = -\int_0^x \frac{(-1)^{2n+1}t^{2n+1}}{1+t^2} dt$$

soit si $x = 1$:

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = -\int_0^1 \frac{(-1)^{2n+1}t^{2n+1}}{1+t^2} dt$$

i.e. $\left|\dfrac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \int_0^1 t^{2n+1}dt = \dfrac{1}{2n+2}$ on fait tendre n vers l'infini et il vient $\pi = 4\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(h) Le raisonnement de la question précédente avec $x = 1$ marche en fait pour tout $x \in [0,1]$ et nous donne alors :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ \forall\, x \in [0,1].$$

(i) L'estimation $\left|\pi - \sum_{k=0}^n \frac{4(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{4}{2n+2}$ obtenue dans 1-g assure que $4\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ approche π à 10^{-3} prés si $\frac{4}{2n+2} < 10^{-3}$ soit $n > 1999$.

(2) (a) Un calcul élémentaire donne $\frac{v_{n+1}}{v_n} = t^2 \cdot \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)}$.

(b) Donc $\lim_n \frac{v_{n+1}}{v_n} = t^2$ avec d'Alembert la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge pour $0 \leq t < 1$ est diverge (et même grossièrement) pour $t > 1$. Pour $t = 1$ c'est plus délicat, il faut par exemple utiliser la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ qui donne $u_n \sim C/n^{3/2}$ d'où la convergence.

(c) Pour $0 < t \leq 1$: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = t^2 \cdot \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)} \leq t^2 \leq 1$ la suite $(v_n)_n$ est donc décroissante.

(d) En particulier pour $t = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aura $v_n \leq v_0 = 1$ soit $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \leq 1$.

(e) La série définissant π est la série $\sum_n v_n$ avec $t = 1/2$ donc bien convergente vu 2-b. La seconde est le reste de la première donc aussi convergente ; pour la dernière c'est à une constante prés le reste de la série géométrique de raison 1/4 donc convergente.

(f) Vu 2-d $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$R_n = 6\sum_{k\geq n+1} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} \leq R_n' = 6\sum_{k\geq n+1} \frac{1}{2^{2k+1}}$$

i.e. $n \in \mathbb{N}^\star$: $0 \leq R_n \leq R_n'$.

(g) L'inégalité précédente nous dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\pi - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}\right| \leq 6 \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{3}{2^{2n+2}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{2^{2n}}.$$

Donc, pour s'assurer d'une précision à 10^{-3} prés il suffit d'avoir $2^{-2n} \leq 10^{-3}$ soit $n \geq \dfrac{3\log(10)}{2\log(2)} \sim 4.98$ i.e. $n \geq 5$

(3) Tout est dit dans la question !

8 octobre 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr